Analisi Matematica 1 - CdL Matematica e Fisica 1
Prova Scritta del 30 giugno 2015

Correzione

1. Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere della serie

$$\sum_n \frac{1}{n^4}\left(\log(e^n+n^2)\right)^\alpha + \frac{(\alpha-3)^n}{n}.$$

Il termine generale $a_n = b_n + c_n$: si ha che

$\sum_n a_n$ converge se $\sum_n b_n$ e $\sum_n c_n$ convergono

(in questo b_n è a termini positivi)

$\sum_n b_n$

$\log(e^n+n^2) \sim \log e^n = n$ quando $n \to +\infty$

dunque $b_n \sim \frac{n^\alpha}{n^4} = \frac{1}{n^{4-\alpha}}$ $n \to +\infty$

Per il teorema confronto asintotico $\sum_n b_n$ converge se $4-\alpha > 1$ se $\boxed{3 > \alpha}$

$\sum_n c_n$

Si osserva che $\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{|\alpha-3|}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\alpha-3|$

e dunque se $-1 < \alpha-3 < 1$, $\sum_n c_n$ converge

se $2 < \alpha < 4$, $\sum_n c_n$ converge

Osservo che, quando $\alpha = 4$, $c_n = \frac{1}{n}$ e perciò $\sum_n c_n$ diverge

quando $\alpha = 2$ $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$ e perciò $\sum_n c_n$ converge x criterio Leibniz

Dunque $\sum_n c_n$ $\begin{cases} \text{converge assolutamente} & 2<\alpha<4 \\ \text{converge} & \text{se } \alpha = 2 \end{cases}$

Dunque $\sum_n a_n$ converge se $\alpha \in]-\infty, 3[\cap [2, 4[$

se $2 \le \alpha < 3$

2

2. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y\tan(x) + \cos x \\ y(\pi/4) = 1, \end{cases}$$

specificandone il suo dominio di definizione.

$y' = a(x)\,y$ con $a(x) = \tan(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow A(x) = -\log(\cos x)$

non metto il modulo perché in un intorno di $x = \frac{\pi}{4}$ $\cos x > 0$

$$y_0(x) = k\,e^{A(x)} = k\,e^{-\log(\cos x)} = \frac{k}{\cos x} \qquad k \in \mathbb{R}$$

è la totalità delle soluzioni dell'equazione

Cerco una soluzione particolare con il metodo della variazione delle costanti arbitrarie ovvero impongo che

$$\left(\frac{k(x)}{\cos x}\right)' = \frac{k'(x)\cos x + k(x)\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,\frac{k(x)}{\cos x} + \cos x$$

$$\Downarrow$$

$$k'(x)\cos x + \cancel{k(x)\operatorname{sen} x} = \cancel{k(x)\operatorname{sen} x} + \cos^3 x$$

si elidono perché l'equazione è lineare

$$k'(x) = \cos^2 x \Rightarrow k(x) = \frac{1}{2}(x + \operatorname{sen} x \cos x) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

integrale generale omogenea

e dunque $y_g(x) = y_0(x) + y_p(x)$ ← soluzione particolare

$$= \frac{k}{\cos x} + \frac{1}{2}(x + \operatorname{sen} x \cos x)\cdot\frac{1}{\cos x} \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{k}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{2}} = 1$$

$$\sqrt{2}\,k + \frac{\pi}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = 1 \qquad k = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

$$y(x) = \frac{x}{2\cos x} + \frac{\operatorname{sen} x}{2} + \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}}{\cos x}$$

ed è definita in $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

3. Data la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + 4x + \frac{2}{2x-1},$$

determinarne il dominio massimale di definizione, i limiti agli estremi di Ω, le equazioni degli eventuali asintoti, gli intervalli di monotonia, la natura dei punti stazionari e il segno. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

Dominio $(f) = \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty$$

$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$ $\qquad \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$

dunque $x=\frac{1}{2}$ asintoto verticale

$$f'(x) = x+4+2\cdot\frac{1}{(2x-1)^2}\cdot(-2) = \frac{(x+4)(4x^2+1-4x)-4}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{4x^3+x-4x^2+16x^2-16x}{(2x-1)^2} = \frac{x\,(4x^2+12x-15)}{(2x-1)^2}$$

$f'(x)=0$ se $x_1=0$ o $x_{2,3} = \frac{-6\pm\sqrt{36+60}}{4} = \begin{cases}\frac{-6-\sqrt{96}}{4}\\ \frac{-6+\sqrt{96}}{4}\end{cases}$

e dunque

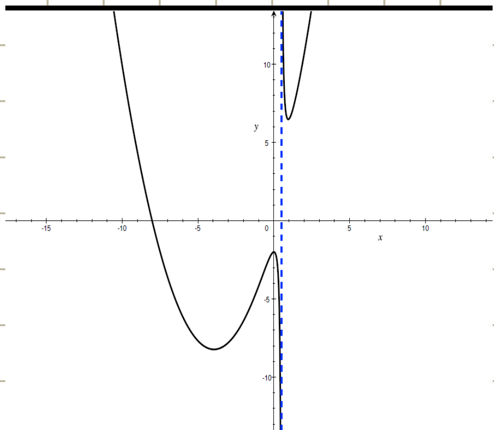
$$f'(x)\begin{cases} <0 & x<\frac{-6-\sqrt{96}}{4} \\ >0 & \frac{-6-\sqrt{96}}{4}<x<0 \\ <0 & 0<x<\frac{1}{2} \\ <0 & \frac{1}{2}<x<\frac{-6+\sqrt{96}}{4} \\ >0 & \frac{-6+\sqrt{96}}{4}<x \end{cases}$$

$$f(x)\begin{cases} \searrow & x<\frac{-6-\sqrt{96}}{4} \\ \nearrow & \frac{-6-\sqrt{96}}{4}<x<0 \\ \searrow & 0<x<\frac{1}{2} \\ \searrow & \frac{1}{2}<x<\frac{-6+\sqrt{96}}{4} \\ \nearrow & \frac{-6+\sqrt{96}}{4}<x \end{cases}$$

$\longrightarrow x=\frac{-6-\sqrt{96}}{4}$ p.to di min. relativo

$\longrightarrow x=0$ p.to di max relativo

$\longrightarrow x=\frac{-6+\sqrt{96}}{4}$ p.to di min. relativo



Nella figura l'asintoto $x=\frac{1}{2}$ è tratteggiato in blu

Per lo studio del segno, si osserva che

- per $x>\frac{1}{2}$, $f(x)$ ha minimo $f\left(\frac{-6+\sqrt{96}}{4}\right)>0$ e dunque $f(x)>0 \;\forall x>\frac{1}{2}$
- per $\frac{-6-\sqrt{96}}{4}<x<\frac{1}{2}$ si ha che $f(x)$ ha come valore massimo $f(0)=-2<0$, e dunque $f(x)<0 \;\forall x\in\left]\frac{-6-\sqrt{96}}{4},\frac{1}{2}\right[$
- nell'intervallo $\left]-\infty,\frac{-6-\sqrt{96}}{4}\right[$ f è strettamente decrescente e $f(-10)\,f(-5)<0$, dunque per il

Teorema di Bolzano $\exists\, \bar{x} \in]-10,-5[: f(\bar{x})=0$ e 4
per la decrescenza questo è unico, e si ha

$$f(x) > 0 \quad \forall x < \bar{x}$$
$$f(x) < 0 \quad \forall x \in \left]\bar{x}, \frac{-6-\sqrt{96}}{4}\right[$$

Infine
$f(x)=k$ 1 soluzione se $k < f\left(\frac{-6-\sqrt{96}}{4}\right)$
$f(x) = f\left(\frac{-6-\sqrt{96}}{4}\right)$ 2 soluzioni
$f(x) = k$ 3 soluzioni $f\left(\frac{-6-\sqrt{96}}{4}\right) < k < -2$
$f(x) = -2$ 2 soluzioni
$f(x) = k$ 1 soluzione $-2 < k < f\left(\frac{-6+\sqrt{96}}{2}\right)$
$f(x) = f\left(\frac{-6+\sqrt{96}}{2}\right)$ 2 soluzioni
$f(x) = k$ 3 soluzioni $f\left(\frac{-6+\sqrt{96}}{2}\right) < k$

4. Sia data la funzione, infinitesima per $x \to 0$,

$$f(x) = \log(\cos(x)) - \sin(\log(x+1)).$$

i) Calcolare lo sviluppo sino al 4 ordine di $f(x)$ nel punto $x_0 = 0$.
ii) Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x) + x + ax^3}{e^{x^4-x^6} - 1}.$$

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2) \quad y \to 0$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$\log(\cos x) = \log\left(1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)\right) =$$
$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4)$$
$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$
$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

$$\sin(\log(1+x)) = \sin\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) =$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^2}{2}\right)^3 + o(x^4)$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + x^3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + x^4\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{\cancel{6}_2} \cdot \frac{\cancel{3}}{2}\right) + o(x^4)$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$f(x) = \cancel{-\frac{x^2}{2}} - \frac{x^4}{12} - x + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$
$$= -x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

Osserviamo poi che

$$e^{x^4-x^6}-1 = 1+(x^4-x^6)+o(x^6)-1 =$$
$$= x^4+o(x^4)$$

e dunque dobbiamo calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)+x+ax^3}{x^4+o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cancel{x}-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{12}+\cancel{x}+ax^3+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3\left(a-\frac{1}{6}\right)-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{x^4+o(x^4)} = \begin{cases} -\infty & \text{se } a<1/6 \\ -1/12 & \text{se } a=1/6 \\ +\infty & \text{se } a>1/6 \end{cases}$$