Analisi Matematica 1

Prova scritta del 16 giugno 2015

CORREZIONE

1) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' - y' = 2e^x + 2\sin(x).$$

L'integrale generale è $y_g(x) = y_0(x) + y_{P_1}(x) + y_{P_2}(x)$ dove

$y_0(x)$ integrale generale $y''' - y' = 0$

$y_{P_1}(x)$ soluzione particolare di $y''' - y' = 2e^x$

$y_{P_2}(x)$ " " " $y''' - y' = 2\sin(x)$

$y''' - y' = 0$ ha come equazione caratteristica (algebrica)

$$\lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda^2 - 1) = 0 \iff \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -1 \text{ e } \lambda_3 = 1$$

da cui segue

$$y_0(x) = c_1 e^{0\cdot x} + c_2 e^{-1\cdot x} + c_3 e^{1\cdot x} = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^x$$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

Per trovare la sol particolare di

$$y''' - y' = 2e^x$$

vorrei cercarla del tipo $\bar{v}(x) = ke^x$

però e^x risolve l'omogenea

$\Rightarrow$ cerco $v(x) = k \cdot x e^x$

$$v' = ke^x + k\,xe^x$$

$$v'' = ke^x + ke^x + k\,xe^x$$

$$v''' = 2ke^x + ke^x + k\,xe^x$$

$$3ke^x + \cancel{kxe^x} - ke^x - \cancel{kxe^x} = 2e^x$$

$\Rightarrow 2k = 2 \Rightarrow k = 1$ soluzione $\Rightarrow \boxed{y_{P_1} = xe^x}$

$$y''' - y' = 2\sin x$$

vorrei cercare sol. particolare del tipo $v(x) = a\sin x + b\cos x$

$$v' = a\cos x - b\sin x$$

$$v'' = -a\sin x - b\cos x$$

$$v''' = -a\cos x + b\sin x$$

$$v''' - v' = -a\cos x + b\sin x - a\cos x + b\sin x = 2\sin x$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 2b = 2 \\ -2a = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 1 \\ a = 0 \end{cases} \quad \text{e dunque} \quad \boxed{y_{P_2}(x) = \cos x}$$

$$\Rightarrow y_g(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^x + xe^x + \cos x \quad + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

2) Determinare tutte le soluzioni $(z,\ w)$ del sistema

$$\begin{cases} |z|^2 w = z, \\ w = \overline{z}^2. \end{cases}$$

(0,0) è soluzione, e semplificando si trova

$$\begin{cases} \overline{z}\cdot\omega = 1 \\ \omega = \overline{z}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{z} = 1/\omega \\ \omega = 1/\omega^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} - \\ \omega^3 = 1 \end{cases}$$

$$\omega_0 = 1 \longrightarrow z_0 = 1$$

$$\omega_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \longrightarrow z_1 = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = \omega_1$$

$$\omega_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \longrightarrow z_2 = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = \omega_2$$

3) Determinare il raggio di convergenza della serie

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{(k-1)!} x^k \right\}.$$

Posto $F(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+1}{(k-1)!} x^k$, dimostrare che

$$\int_0^{1/2} F(x)dx = \frac{\sqrt{e}}{4}.$$

$$a_k = \frac{k+1}{(k-1)!} \qquad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+2}{k!} \cdot \frac{(k-1)!}{k+1} = \frac{k+2}{k+1} \cdot \frac{1}{k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \sqrt[k]{a_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \Rightarrow \boxed{R = +\infty}$$

e dunque la serie converge su tutto $\mathbb{R}$

$$\int_0^{1/2} F(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{(k-1)!} \cdot \int_0^{1/2} x^k dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cancel{k+1}}{(k-1)!} \cdot \left[\frac{x^{k+1}}{\cancel{k+1}} \right]_0^{1/2}$$

integrando per serie

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{(k-1)!} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} = \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}}$$

✓

4) Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(e^x + x^\alpha)}{(1+x)^{\alpha+1}\arctan(x^\alpha)}\,dx$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Studieremo separatamente $\int_0^1 f(x)\,dx$ e $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$

dove $f(x) = \dfrac{\log(e^x+x^\alpha)}{(1+x)^{\alpha+1}\operatorname{arctg}(x^\alpha)}$ è continua e >0 $\forall x>0$

Quando $x \to 0$ $\quad f(x) = \dfrac{\log(1+x+o(x)+x^\alpha)}{(1+x)^{\alpha+1}\cdot(x^\alpha+o(x^\alpha))} \sim \dfrac{x+x^\alpha}{x^\alpha}$

ovvero $f(x) \sim 1 + \dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$ per $x \to 0$, da cui segue

$\int_0^1 f(x)\,dx \in \mathbb{R}$ <u>sse</u> $\int_0^1 \left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx \in$ <u>sse</u> $\alpha-1<1$ <u>sse</u> $\alpha<2$

Quando $x \to +\infty$ $\quad f(x) = \dfrac{\log(e^x+x^\alpha)}{(1+x)^{\alpha+1}\operatorname{arctg}(x^\alpha)} \sim \dfrac{\log(e^x)}{x^{\alpha+1}\cdot\frac{\pi}{2}}$

ovvero $f(x) \sim \dfrac{x}{x^{\alpha+1}\cdot\frac{\pi}{2}} = \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{1}{x}\right)^\alpha$ $\quad x \to +\infty$

Dunque $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \in \mathbb{R}$ <u>sse</u> $\int_1^{+\infty} \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha dx \in \mathbb{R}$ <u>sse</u> $\alpha > 1$

Concludendo $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \in \mathbb{R}$ <u>sse</u> $1 < \alpha < 2$