A1-2015gen28-sol

Prova scritta di Analisi Matematica 1 - SOLUZIONI

CdL Matematica & Fisica - 28 gennaio 2015

1° Esercizio: vedi correzione della seconda prova in itinere del 28 gennaio 2015

2° Esercizio: vedi correzione della seconda prova in itinere del 28 gennaio 2015

3. Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere della serie

$$\sum_n \frac{n + (\alpha - 2)^{-2n}}{n^{\alpha^2 - \alpha}}.$$

$$a_n = \frac{1}{n^{\alpha^2-\alpha-1}} + \frac{1}{(\alpha-2)^{2n} \cdot n^{\alpha^2-\alpha}} = b_n + c_n$$

1) $\sum_n b_n$ converge se $\alpha^2-\alpha-1 > 1$

se $\alpha^2-\alpha-2 = (\alpha-2)(\alpha+1) > 0$

se $\alpha \in (-\infty,-1) \cup (2,+\infty)$

2) Per il criterio della radice

$$\sqrt[n]{c_n} = \frac{1}{(\alpha-2)^2} \sqrt[n]{\frac{1}{n^{\alpha^2-\alpha}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{(\alpha-2)^2}$$

$\frac{1}{(\alpha-2)^2} < 1$ se $\alpha-2 < -1$ o $1 < \alpha-2$

se $\alpha < 1$ o $3 < \alpha$

se $\alpha \in (-\infty, 1) \cup (3,+\infty)$

Per il criterio radice n-esima

$\sum_n c_n$ converge se $\alpha \in (-\infty,1) \cup (3,+\infty)$

diverge se $\alpha \in (1,3)$

Quando $\alpha = 1$

$$c_n = 1 \Rightarrow \sum_n b_n \text{ diverge}$$

Quando $\alpha = 3$, $c_n = \left(\frac{1}{n}\right)^6 \Rightarrow \sum_n b_n$ converge

Dunque $\sum_n c_n$ converge se $\alpha \in (-\infty, 1) \cup [3, +\infty)$

Infine $\sum_n a_n$ converge se $\sum_n b_n$ e $\sum_n c_n$ convergono

se $\begin{cases} \alpha \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty) \\ \alpha \in (-\infty, 1) \cup [3, +\infty) \end{cases}$

se $\alpha \in (-\infty, -1) \cup [3, +\infty)$

4.Determinare l'ordine e la parte principale della funzione

$$f(x) = e^{-2x^2} - cos(2e^x - 2),$$

quando $x \to 0$.
Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il seguente limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - 2x^\alpha}{x^3}.$$

Possiamo limitarci all'ordine 3

$$e^{-2x^2} = 1 - 2x^2 + o(x^3) \qquad x \to 0$$

$$2e^x - 2 = 2\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - 2 = 2x + x^2 + o(x^2) \quad x \to 0$$

$$\cos(2e^x - 2) = 1 - \frac{1}{2}(2x + x^2)^2 + o((2x + o(x))^3)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(4x^2 + 4x^3) + o(x^3)$$

$$= 1 - 2x^2 - 2x^3 + o(x^3) \qquad x \to 0$$

$$f(x) = 1 - 2x^2 - 1 + 2x^2 + 2x^3 + o(x^3) = 2x^3 + o(x^3) \qquad x \to 0$$

e quindi ordine$(f) = 3$ $\quad pp(f) = 2x^3$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-2x^\alpha}{x^3} = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x^\alpha+o(x^\alpha)}{x^3} = -\infty & \alpha < 3 \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{o(x^3)}{x^3} = 0 & \alpha = 3 \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^3+o(x^3)}{x^3} = 2 & 3 < \alpha \end{cases}$$