# Prova Itinere 2 di Analisi Matematica 1 - SOLUZIONI
# CdL Matematica & Fisica - 28 gennaio 2015

1. Data la funzione

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 3}{e^x - 1},$$

determinarne il dominio massimale di definizione $\Omega$, i limiti agli estremi di $\Omega$, le equazioni degli eventuali asintoti, il segno, gli intervalli di monotonia e la natura dei punti stazionari. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.
**Facoltativo:** Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, le regioni di monotonia della funzione

$$f(x) = \frac{e^{\alpha x} + 3}{e^x - 1},$$

$$\text{Dominio}(f) = \{x \in \mathbb{R} : e^x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

LIMITI AGLI ESTREMI

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{0^+ + 3}{0^+ - 1} = -3 \qquad \lim_{x\to 0^-} f = 4 \cdot \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{e^x} = +\infty$$

Quindi $y = -3$ asintoto orizzontale per $x \to -\infty$
$x = 0$ " verticale

Non ci sono asintoti obliqui

SEGNO

$$\text{segno}(f) = \text{segno}(e^x - 1) = \begin{cases} < 0 & x < 0 \\ > 0 & x > 0 \end{cases}$$

INTERVALLI DI MONOTONIA

$f$ continua su $]0, +\infty[$, $\lim_{x\to 0^+} f = \lim_{x\to+\infty} f = +\infty$

$\Longrightarrow \exists\, x_m > 0 : f(x_m) = \min f(]0, +\infty[)$

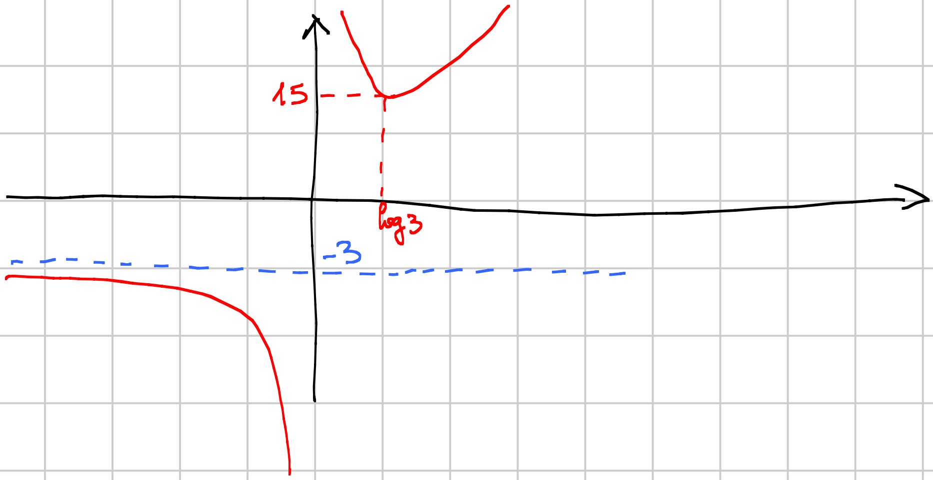
$$f' = \frac{2e^{2x}(e^x - 1) - e^x(e^{2x} + 3)}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^{3x} - 2e^{2x} - 3e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x(e^x - 3)(e^x + 1)}{(e^x - 1)^2}$$

$f'(x) = 0$ se $e^x = 3$ se $x = \log 3$ $(> 1)$

$$f' \begin{cases} < 0 & x < \log 3 \quad x \neq 0 \\ > 0 & x > \log 3 \end{cases} \Longrightarrow x_m = \log 3 \text{ p.to di minimo per } f$$

$$f(\log 3) = \frac{27 + 3}{2} = 15 = \min f(]0, +\infty[)$$

2




$$f(x)=\frac{e^{\alpha x}+3}{e^x-1}$$

$$f'=\frac{\alpha e^{\alpha x}(e^x-1)-e^x(e^{\alpha x}+3)}{(e^x-1)^2}=\frac{(\alpha-1)e^{(\alpha+1)x}-\alpha e^{\alpha x}-3e^x}{(e^x-1)^2}$$

$$=\frac{e^x\left((\alpha-1)e^{\alpha x}-\alpha e^{(\alpha-1)x}-3\right)}{(e^x-1)^2}$$

$f'(x)=0$ se $P(e^x)=(\alpha-1)e^{\alpha x}-\alpha e^{(\alpha-1)x}-3=0$

se $\exists\, t>0 : P(t)=(\alpha-1)t^{\alpha}-\alpha t^{\alpha-1}-3=0$

Ma $P'(t)=(\alpha-1)\alpha t^{\alpha-1}-\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}=\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}(t-1)=0$

quando $t=1$

$\alpha<0$ $\quad P(t)\begin{cases}\text{decresce } 0<t<1\\ \text{cresce } 1<t\end{cases}$ $\quad$ ovvero $P(1)=-4=\min P(t)$

e $P(0)=-3$ $\quad \lim_{t\to+\infty}P(t)=-3$

dunque $\nexists\, \bar t : P(\bar t)=0$ dunque $\nexists$ punti stazionari per $f$

$\alpha=0$ $\quad P(t)=-3\neq 0 \Rightarrow \nexists$ punti stazionari per $f$

$\alpha\in(0,1)$ $\quad P(t)\begin{cases}\text{cresce in } (0,1)\\ \text{decresce in } (1,+\infty)\end{cases}$

dunque $P(1)=-4=\max P(]0,+\infty[)<0$

dunque $\nexists\, t>0 : P(t)=0$

dunque $\nexists$ punti stazionari per $f$

$\alpha = 1$ $\qquad P(t) = -4 \quad \forall t \implies \nexists$ punti stazionari per $f$

3

$\alpha > 1$ $\qquad \lim_{t\to 0} P(t) = -3 \qquad \lim_{t\to+\infty} P(t) = +\infty$

$$P(t) \begin{cases} \text{decresce} & 0<t<1 \\ \text{cresce} & 1<t \end{cases}$$

$P(1) = -4 = \min P(]0,+\infty[)$

$\implies \exists$ uno ed uno solo $\bar{t} > 1 : P(\bar{t}) = 0$

$\implies \exists$ " " " " punto stazionario $x_m = \log(\bar{t})$ che è di minimo per $f$

2. Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x)\cdot\log_x(1-x)}{x^2}$$

$(1-x) = x^{\log_x(1-x)} = e^{\log x \cdot \log_x(1-x)}$

$(1-x) = e^{\log(1-x)}$ $\qquad \implies \log(1-x) = \log(x)\log_x(1-x)$

e quindi $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x \log_x(1-x)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1-x)}{-x} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{-x}$

$$= 1 \cdot \frac{1}{0^-} = -\infty$$

3. Determinare i valori dei parametri $a$, $b$, e $c \in \mathbb{R}$ per cui la seguente funzione sia 2 volte derivabile con derivata seconda continua su tutto $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x+2)}{x+1}, & \text{se } x < -1 \\ ax^2 + bx + c, & \text{se } -1 \le x. \end{cases}$$

La funzione è due volte derivabile $\forall x \neq -1$ comunque si prendano $a, b, c \in \mathbb{R}$

La continuità in $x = -1$

$\displaystyle\lim_{x\to -1} f = \lim_{y\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} 2y}{y} = 2 = a - b + c = \lim_{x\to 0^+} ax^2+bx+c$

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f$

$\Rightarrow$ $\boxed{a-b+c=2}$ garantisce la continuità di $f$ in $x=-1$

Derivabilità

$$\lim_{x\to -1^-} f' = \lim_{y\to 0^-} \left(\frac{\operatorname{sen} 2y}{y}\right)' = \lim_{y\to 0^-} \frac{2y\cos 2y - \operatorname{sen} 2y}{y^2} \overset{(H)}{=}$$

$$= \lim_{y\to 0^-} \frac{\cancel{2\cos 2y} - 4y\operatorname{sen} 2y - \cancel{2\cos 2y}}{2y} = 0$$

$$\lim_{x\to -1^+} f' = \lim_{x\to -1^+} 2ax+b = -2a+b$$

$\Rightarrow$ $\boxed{-2a+b=0}$, insieme all'uguaglianza precedente, garantisce la derivabilità in $x=-1$

Derivata seconda

$$\lim_{x\to -1} f'' = \lim_{y\to 0^-} \left(\frac{2y\cos 2y - \operatorname{sen} 2y}{y^2}\right)' =$$

$$= \lim_{y\to 0^-} \left(-\frac{2}{y^3}\cdot\left(2y\cos 2y - \operatorname{sen} 2y\right) + \frac{1}{y^2}\left(\cancel{2\cos 2y} - 4y\operatorname{sen} 2y - \cancel{2\cos 2y}\right)\right)$$

$$= \lim_{y\to 0^-} \frac{-4y^2\operatorname{sen} 2y - 4y\cos 2y + 2\operatorname{sen} 2y}{y^3} \overset{H}{=} \dots \overset{H}{=} \dots \overset{H}{=} \frac{4}{3}$$

$$\lim_{x\to -1^+} f'' = \lim_{x\to -1^+} 2a = 2a \quad \Rightarrow \quad \boxed{2a = 4/3}$$

Le tre condizioni debbono essere soddisfatte contemporaneamente

$$\begin{cases} a = 2/3 \\ -2a+b=0 \\ a-b+c=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 2/3 \\ b = 4/3 \\ c = 2 - \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \end{cases}$$

4. Stabilire se sono vere/false le seguenti affermazioni, motivando la risposta:

i) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione 2 volte derivabile in $\mathbb{R}$, decrescente e tale che $f''(x) \geq 0$ su $\mathbb{R}$. Allora $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

ii) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in $\mathbb{R}$ con derivata continua e tale che $f'(q) = 2$ per ogni $q \in \mathbb{Q}$. Allora $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

i) è FALSA : preso $f(x) = e^{-x}$

$f$ derivabile 2 volte

$f' = -e^{-x} < 0 \ \forall x$ quindi decrescente

$f'' = e^{-x} > 0 \ \forall x$

però $\lim_{x \to +\infty} f = 0^+$

ii) è vera

$f'$ continua

$\mathbb{Q}$ denso in $\mathbb{R}$ ovvero $\forall z \in \mathbb{R} \ \exists \{q_n\} \subseteq \mathbb{Q} : \lim_n q_n = z$

$f'(q) = 2 \quad \forall q \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{R} \quad f'(z) = \lim_{n \to +\infty} f(q_n) = 2$

Ma allora $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - f(0)}{x} \cdot x + f(0)$

$= \lim_{x \to +\infty} f'(z_x) \cdot \lim_{x \to +\infty} x + f(0)$

$= 2 \cdot (+\infty) + f(0) = +\infty$