A1-2015feb18-sol

Prova scritta di Analisi Matematica 1 - SOLUZIONI
CdL Matematica & Fisica - 18 febbraio 2015

1) Sia $f(x) = e^{-2x^2} - \cos(2e^x - 2)$.
   a) Determinare l'ordine e la parte principale della funzione $f(x)$ quando $x \to 0$.
   b) Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - 2x^\alpha}{x^3}.$$

Possiamo limitarci all'ordine 3

$$e^{-2x^2} = 1 - 2x^2 + o(x^3) \qquad x \to 0$$

$$2e^x - 2 = 2\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - 2 = 2x + x^2 + o(x^2) \qquad x \to 0$$

$$\cos(2e^x - 2) = 1 - \frac{1}{2}(2x + x^2)^2 + o((2x + o(x))^3)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(4x^2 + 4x^3) + o(x^3)$$

$$= 1 - 2x^2 - 2x^3 + o(x^3) \qquad x \to 0$$

$$f(x) = 1 - 2x^2 - 1 + 2x^2 + 2x^3 + o(x^3) = 2x^3 + o(x^3) \qquad x \to 0$$

e quindi ordine$(f) = 3$ $\qquad$ pp$(f) = 2x^3$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - 2x^\alpha}{x^3} = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x^\alpha + o(x^\alpha)}{x^3} = -\infty & \alpha < 3 \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{o(x^3)}{x^3} = 0 & \alpha = 3 \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^3 + o(x^3)}{x^3} = 2 & 3 < \alpha \end{cases}$$

2) Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} e^{-1/x},$$

se ne determini il dominio massimale, il segno, i limiti agli estremi del dominio, gli asintoti, le regioni di crescenza/decrescenza, la natura degli eventuali punti stazionari, e se ne studi la concavità. Si rappresenti quindi graficamente la funzione e si determini il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Dominio di $f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e la funzione risulta continua e derivabile infinite volte sul dominio. Si può osservare che

$$f(x) = g(1/x) \quad \text{dove} \quad g(z) = z e^{-z}$$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} e^{-1/x} = 0^- \cdot e^{0^+} = 0^-$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} e^{-1/x} = \lim_{y \to +\infty} -y e^{y} = -\infty \cdot e^{+\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} e^{-1/x} = \lim_{y \to +\infty} y e^{-y} = \lim_{y \to +\infty} e^{-y + \log y} =$$

$$= \lim_{y \to +\infty} e^{y\left(-1 + \frac{\log y}{y}\right)} = e^{+\infty(-1 + 0^+)} = 0^+$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} e^{-1/x} = \lim_{y \to 0^+} y e^{-y} = 0^+ e^{0^-} = 0^+$$

dunque $x=0$ è un asintoto verticale.

SEGNO

$f(x) = \frac{1}{x} e^{-1/x}$ ha lo stesso segno di $1/x$, e quindi

$$\text{segno}(f) = \begin{cases} <0 & x<0 \\ >0 & x>0 \end{cases}$$

REGIONI DI MONOTONIA

$$f'(x) = \left[g(1/x)\right]' = \left[e^{-y} - y e^{-y}\right](1/x) \cdot \left(-1/x^2\right)$$

$$= \left(e^{-1/x} - \frac{1}{x} e^{-1/x}\right) \cdot \left(-1/x^2\right) = \frac{e^{-1/x}}{x^3}(1 - x)$$

$f'(x) = 0$ se $x = 1$; $f' \begin{cases} <0 & \text{se } x<0 \\ >0 & \text{se } 0<x<1 \\ <0 & \text{se } 1<x \end{cases}$

e dunque $x=1$ risulta essere un punto di max, ed è il max assoluto $\max f(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = f(1) = 1/e$

CONCAVITÀ

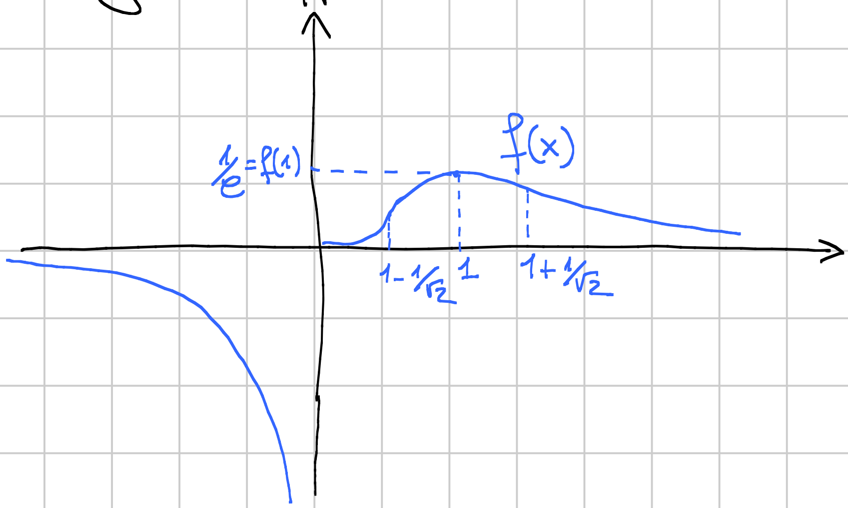
$$f'' = \left[\frac{e^{-1/x}}{x^3}(1-x)\right]' = -\frac{3}{x^4}\cdot e^{-1/x}(1-x) + \frac{1}{x^5}e^{-1/x}(1-x) - \frac{e^{-1/x}}{x^3}$$

$$= \frac{e^{-1/x}}{x^5}\left(1-x-3x+3x^2-x^2\right) = \frac{e^{-1/x}}{x^5}\left(1-4x+2x^2\right)$$

$f''(0)=0$ se $2x^2-4x+1=0$ se $x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{4-2}}{2}$ $\begin{cases} 1-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1+\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$$f'' \begin{cases} <0 & \text{se } x<0 & \text{(concava)} \\ >0 & \text{se } 0<x<1-\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{(convessa)} \\ <0 & \text{se } 1-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<1+\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{(concava)} \\ >0 & \text{se } 1+\frac{1}{\sqrt{2}}<x & \text{(convessa)} \end{cases}$$

Un grafico approssimativo è dato da



Osserviamo che $f(]-\infty,0[)=]-\infty,0[$; $f(]0,1])=]0,\frac{1}{e}]$; $f(]1,+\infty[)=]0,\frac{1}{e}[$

e dunque

se $k<0$ allora $f(x)=k$ ammette 1! soluzione

se $k=0$ allora $f(x)=k$ NON ha soluzione

se $0<k<1/e$ allora $f(x)=k$ ammette 2 soluzioni

se $\frac{1}{e}=k$ allora $f(x)=k$ " 1! soluzione

se $\frac{1}{e}<k$ allora $f(x)=k$ NON ha soluzione

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = -3x^2 - 5x + 5 + 2(4x+1)e^x, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 7. \end{cases}$$

L'integrale generale di $y''+2y'-3y=0$

L'eq. caratteristica $\lambda^2+2\lambda-3=(\lambda+3)(\lambda-1)=0$

che ha soluzioni $\lambda_1=-3 \quad \lambda_2=1$

e quindi $y_0(x)=c_1e^{-3x}+c_2e^x \qquad c_1,c_2\in\mathbb{R}$

è l'integrale cercato

Una soluzione particolare di $y''+2y'-3y=-3x^2-5x+5$

cerchiamo una soluzione nella forma

$\sigma(x)=ax^2+bx+c$

$\sigma'(x)=2ax+b$

$\sigma''(x)=2a$

impongo sia soluzione

$\Rightarrow 2a+2(2ax+b)-3(ax^2+bx+c)=-3x^2-5x+5$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} -3a=-3 \\ +4a-3b=-5 \\ 2a+2b-3c=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=1 \end{cases}$$

e dunque $y_{1,p}=x^2+3x+1$

Una soluzione particolare di $y''+2y'-3y=2(4x+1)e^x$

e^x compare sia nel termine noto che nelle soluzioni dell'omogenea

dunque cerchiamo una soluzione del tipo

$\sigma(x)=(ax^2+bx^3)e^x$

$\sigma'=(2ax+3bx^2)e^x+(ax^2+bx^3)e^x=e^x(2ax+x^2(a+3b)+bx^3)$

$\sigma''=(2a+2(a+3b)x+3bx^2)e^x+(2ax+(a+3b)x^2+bx^3)$

$\overset{!}{=}(2a+(4a+6b)x+(a+6b)x^2+bx^3)e^x$

sostituendo e semplificando e^x

$2a+(4a+6b)x+(a+6b)x^2+b\cancel{x^3}+4ax+(2a+6b)x^2+2\cancel{bx^3}-3ax^2-\cancel{3bx^3}$

$=8x+2$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} 2a=2 \\ 4a+6b+4a=8 \\ \cancel{a}+6b+\cancel{2a}+6b-\cancel{3a}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$$

e dunque $y_{2,p}=x^2e^x$

L'integrale generale è quindi

$$y_g(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^x + x^2 + 3x + 1 + x^2 e^x \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y_g'(x) = -3c_1 e^{-3x} + c_2 e^x + 2x + 3 + 2x e^x + x^2 e^x$$

Impongo le C.I. $\begin{cases} y_g(0) = 1 \\ y_g'(0) = 7 \end{cases}$ Trovando

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 1 = 1 \\ -3c_1 + c_2 + 3 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4c_1 - 2 = -6 \\ \quad // \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

e quindi la soluzione cercata è

$$\boxed{-e^{-3x} + e^x + x^2 + 3x + 1 + x^2 e^x}$$

4) Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(1/x^2)}{|x-1|^{2\alpha}(\log(1+x))^\alpha} dx$$

converge

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg}(1/x^2)}{|x-1|^{2\alpha}[\log(1+x)]^\alpha}$$ è definita e continua su $]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$

dunque studiamo $\int_0^{1/2} f + \int_{1/2}^1 f + \int_1^3 f + \int_3^{+\infty} f$

1) Quando $x \to 0$ $f(x) \sim \dfrac{\pi/2}{x^\alpha}$,

e quindi $\int_0^{1/2} f$ converge se $\boxed{\alpha < 1}$

2) e 3) quando $x \to 1$ $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} 1/x^2}{|x-1|^\alpha [\log(1+x)]^\alpha} \sim \dfrac{\pi/4}{(\log 2)^\alpha \cdot |x-1|^\alpha}$

e quindi $\int_{1/2}^1 f$ e $\int_1^3 f$ convergono se $\boxed{\alpha < 1}$

4) quando $x \to +\infty$ $f(x) \sim \dfrac{1/x^2}{x^\alpha \cdot (\log x)^\alpha} = \dfrac{1}{x^{\alpha+2}(\log x)^\alpha}$

e dunque $\int_3^{+\infty} f$ converge se $\alpha + 2 > 1$

se $\boxed{\alpha > -1}$

Dunque $\int_0^{+\infty} f \in \mathbb{R}$ se $-1 < \alpha < 1$