



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA
 DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA
 CORSI DI LAUREA IN FISICA E MATEMATICA
 PRIMO COMPITINO DI ANALISI MATEMATICA 1
 26 NOVEMBRE 2014

Nome e Cognome:

Corso di Laurea: Numero di matricola:

Istruzioni: Scrivete nome, cognome, Corso di Laurea e numero di matricola negli appositi spazi. Al termine della prova **riconsegnate** questo foglio all'interno dei fogli protocollo sui quali avete svolto gli esercizi. Su ognuno di tali fogli riportate il vostro nome e cognome. **Non scrivete nei quadretti in alto.**

1. Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la successione definita da

$$a_n = (-1)^n + \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Determinare estremo inferiore ed estremo superiore dell'insieme $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ stabilendo se si tratta di minimo e/o massimo.
- (b) Calcolare $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$ e $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n$.
- (c) Stabilire se $\ell = 1/2$ è punto limite di $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Al variare di $\alpha \in (0, +\infty) \setminus \{3\}$ si determini il carattere della serie la cui somma parziale n -esima S_n è data da

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\left(1 + \frac{\log(3)}{k}\right)^{k^2}}{k^2 + \alpha^k}.$$

Facoltativo: Studiare il carattere della serie quando $\alpha = 3$.

3. Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la successione definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{4 + 3a_n}{3 + 2a_n}, & n \in \mathbb{N}, \\ a_1 = 3. \end{cases}$$

Stabilire se la successione ammette limite per $n \rightarrow +\infty$ e, in caso affermativo, calcolarlo.

4. Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione a termini non negativi la cui serie associata diverge positivamente. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere, motivando le risposte (se sono vere dimostrarle, se sono false produrre un controesempio):

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1 + a_n^2} = +\infty.$

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1 + a_n^2} < +\infty.$