Analisi 1 - 28 settembre 2016 - lezione 3

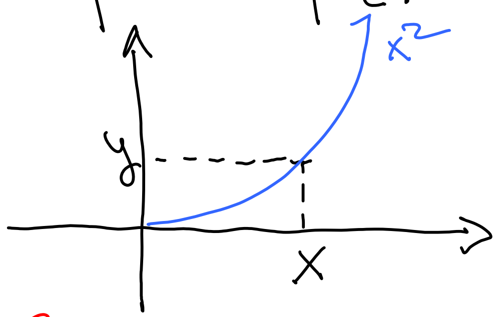
Def $f: A \to B$ si dice
iniettiva se $\forall x, y \in A \quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
suriettiva " $\forall y \in B \ \exists x \in A$ t.c. $f(x) = y$

Oss iniettività $\equiv$ punti diversi hanno immagini $\neq$
suriettività $\equiv$ ogni punto del codominio è immagine di (almeno) un punto del dominio

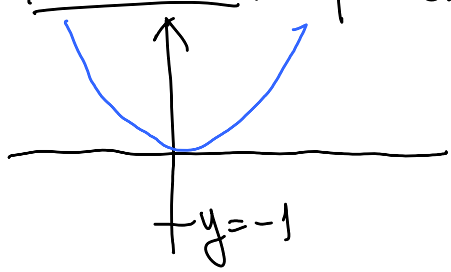
Esempio
$f(x) = x^2 \qquad f: [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ è iniettiva
" $\qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è iniettiva

Esempio
$f(x) = x^2 \qquad f: [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ è suriettiva
infatti $\forall y \geq 0 \quad \exists x \in [0, +\infty[: x^2 = y$ e $x = \sqrt{y}$

inoltre è iniettiva e dunque
$f = x^2 \quad f: [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ è biiettiva



Esempio
$f(x) = x^2 \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: questa f.ne NON è suriettiva poiché preso $y < 0 \quad \nexists x \in \mathbb{R} : x^2 = y$



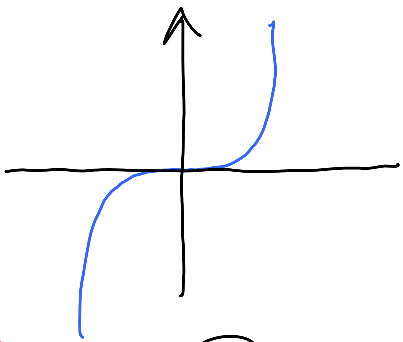
$\nexists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$

Oss: Data $f: A \to B$ iniettiva (funzione)
$\Rightarrow f: A \to f(A) = \{y : \exists x \in A \ f(x) = y\}$
questa è adesso iniettiva & suriettiva
ovvero biiettiva

Def $f: A \to B$ questa si dice
strettamente crescente se $\forall x, y \in A \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
" decrescente se " $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

Esempio
$f(x) = x^3 \quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è strettamente crescente

$x < y$
$$y^3 - x^3 \overset{(*)}{=} \underbrace{(y-x)}_{\substack{>0 \\ \text{per ipotesi}}} \underbrace{(y^2 + xy + x^2)}_{(**)\ >0 \text{ quando } x \neq y} > 0$$



Oss $P(y) = y^3 - x^3$ ha $y = x$ come radice
infatti $P(x) = x^3 - x^3 = 0$

$\Rightarrow y - x$ divide $y^3 - x^3$

$$\begin{array}{cccc|l} y^3 & 0 & 0 & -x^3 & y - x \\ \cline{5-5} y^3 & -xy^2 & & & y^2 + xy + x^2 \\ \hline // & xy^2 & & -x^3 & \\ & xy^2 & -x^2y & & \\ \cline{2-4} & // & x^2y & -x^3 & \\ & & x^2y & -x^3 & \\ \cline{3-4} & & // & & \end{array}$$

$\underbrace{y^2+xy+x^2}>0$ se $x\neq y$ $\quad x,y\in\mathbb{R}$

penso a ↑ come un polinomio in y e x un parametro

$$y_{1,2}=\frac{-x\pm\sqrt{x^2-4x^2}}{2}=\frac{-x\pm|x|\cdot\sqrt{-3}}{2}$$

se $x\neq 0$ allora $\nexists$ radici reali e $y^2+xy+x^2>0$

se $x=0$ " il polinomio diventa y^2 però $x\neq y$

allora $y\neq 0$ allora $y^2>0$

Teorema

$f: A\to B$ funzione strettamente crescente (decrescente)

allora f è iniettiva

dim

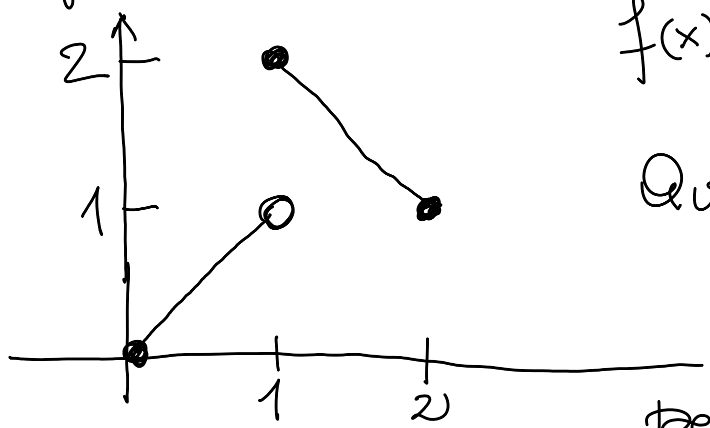
per ipotesi $x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$

$$x\neq y \begin{cases} x<y \Rightarrow f(x)<f(y) \\ x>y \Rightarrow f(x)>f(y)\end{cases} \Rightarrow f(x)\neq f(y)$$

Problema: $f: A\to B$ iniettiva $\Rightarrow f$ è strettamente crescente o decrescente?

Risposta: NO!

Infatti

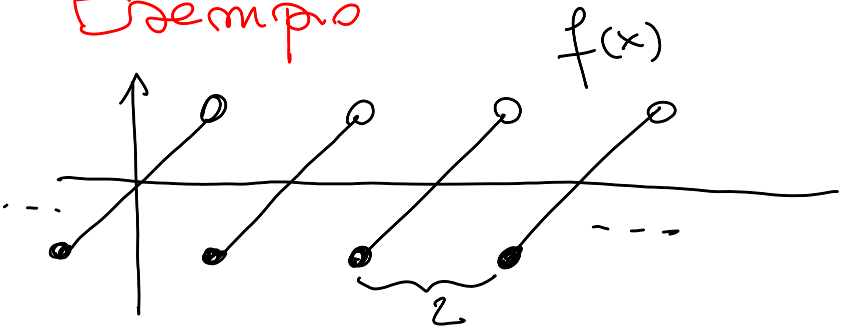


$$f(x)=\begin{cases} x & \text{se } 0\leq x<1 \\ 3-x & \text{se } 1\leq x\leq 2\end{cases}$$

Questa f.ne NON È né strett. crescente né " decrescente però è iniettiva

Def $f: A \to B$ questa si dice periodica di periodo $T>0$ se
1) $\forall x \in A$, $x+T \in A$
2) $\forall x \in A$, $f(x) = f(x+T)$

Esempio



Questo è il grafico di una funzione periodica

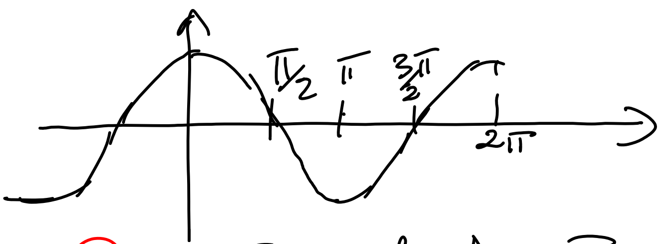
$\underbrace{f: [-1,1] \to \mathbb{R}}_{\text{restrizione}}$

$$f(x) = \begin{cases} x & -1 \le x < 1 \\ -1 & x = 1 \end{cases}$$

$f(x+2) = f(x)$ $\qquad$ $f(x + 2 \cdot 2) = f(x)$

Esempio

$f(x) = \operatorname{sen} x$
$f(x+2\pi) = \operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen}(x)$



$g(x) = \cos x$
$g(x+2\pi) = g(x)$

Oss Se $f: A \to B$ è periodica di periodo $T>0$ allora è periodica di periodo $2T$, $3T$, $4T$ ...

Attenzione: se $f: A \to B$ è periodica di periodo T allora NON È DETTO che f sia periodica di periodo $T/2$

Esempio $f(x) = \operatorname{sen} x$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$$

Ma $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos\pi + \operatorname{sen}\pi\cos\frac{\pi}{3}$

$$= -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \neq \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$$

Esercizio

Data $f(x) = \operatorname{sen}\frac{x}{7} + \cos\frac{x}{5}$
calcolare, se esiste, il minimo periodo

dim

periodo di $\operatorname{sen}\frac{x}{7}$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x+T}{7}\right) = \operatorname{sen}\frac{x}{7}$$

$$\iff \operatorname{sen}\frac{x}{7} = \operatorname{sen}\frac{x}{7}\cdot\cos\frac{T}{7} + \cos\frac{x}{7}\cdot\operatorname{sen}\frac{T}{7}$$

$$\iff \begin{cases} \cos\frac{T}{7} = 1 \\ \operatorname{sen}\frac{T}{7} = 0 \end{cases} \iff \frac{T}{7} = 2\pi \iff \boxed{T = 14\pi}$$

$$\cos\left(\frac{x+\tilde{T}}{5}\right) = \cos\frac{x}{5}$$

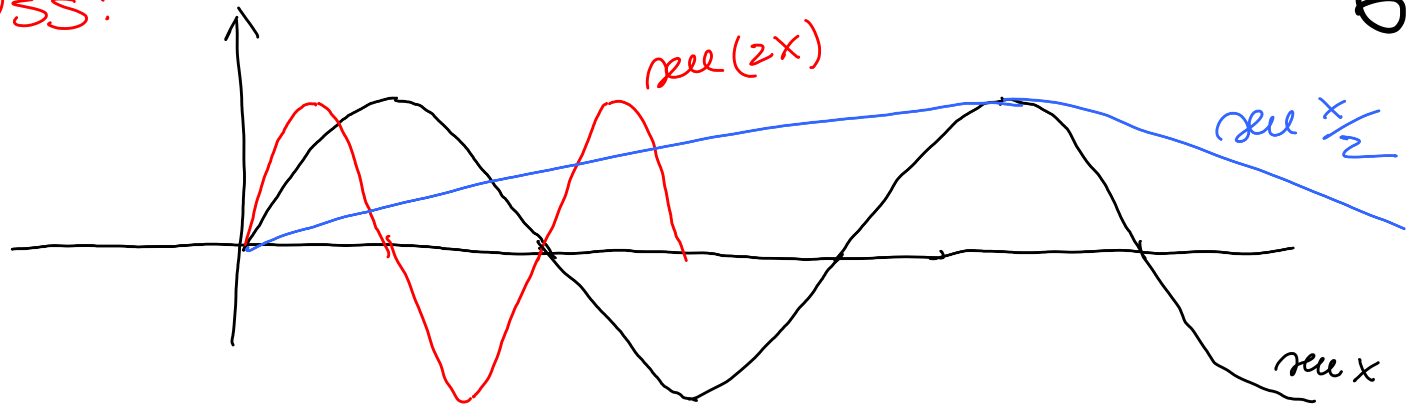
$$\cos\frac{x}{5}\cos\frac{\tilde{T}}{5} - \operatorname{sen}\frac{x}{5}\operatorname{sen}\frac{\tilde{T}}{5} = \cos\frac{x}{5}$$

$$\iff \begin{cases} \cos\frac{\tilde{T}}{5} = 1 \\ \operatorname{sen}\frac{\tilde{T}}{5} = 0 \end{cases} \iff \frac{\tilde{T}}{5} = 2\pi \iff \tilde{T} = 10\pi$$

$$T_{\text{minimo}} = \operatorname{mcm}\{T, \tilde{T}\} = \operatorname{mcm}\{14\pi, 10\pi\}$$

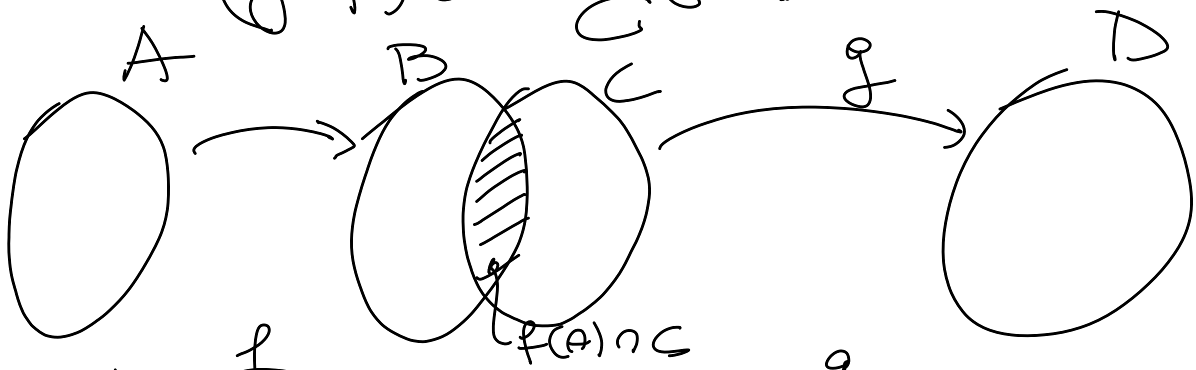
$$= 2\pi \operatorname{mcm}\{7, 5\} = 70\pi$$

Oss:



Def $f:A\to B$ $\quad g:C\to D$ $\quad$ se $f(A)\cap C\neq\emptyset$ allora possiamo definire la "composizione di f e g" come

$$(g\circ f)(x) := g(f(x))$$



$$x\in A \xrightarrow{f} f(x)\in f(A)\cap C \xrightarrow{g} g(f(x))\in D$$

Def Data f funzione, diciamo "campo di esistenza" o "dominio massimale" l'insieme $\{x\in\mathbb{R} : f(x) \text{ ha senso}\}$

$$\{x\in\mathbb{R} : f(x)\in\mathbb{R}\}$$

Esempio

$f(x)=\sqrt{4-x^2}$ $\qquad$ $\text{dominio}(f)\equiv\{x\in\mathbb{R} : 4-x^2\geq 0\}$

$$\equiv [-2,2]$$

Esempio

$f(x)=\ln\left(\sqrt{4-x^2}-1\right)$ $\qquad$ $\text{dominio}(f)=\{x\in\mathbb{R} : \sqrt{4-x^2}-1>0\}$

$$= \{x\in\mathbb{R} \quad \sqrt{4-x^2} > 1\} = \{x\in\mathbb{R} : 4-x^2 \geq 0 \text{ e } 4-x^2 > 1^2\}$$

$$= \{x\in\mathbb{R} : -2\leq x\leq 2 \text{ e } 3 > x^2\} =$$

$$= \{x\in\mathbb{R} : x\in[-2,2] \text{ e } x\in\,]-\sqrt{3},\sqrt{3}[\,\} = \,]-\sqrt{3},\sqrt{3}[$$

I numeri naturali

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \underbrace{\dots}_{\uparrow \text{ che significa?}}\}$$

oggetti primitive : "0" "numero" "successore"

Assiomi
1) 0 è un numero
2) il successore di un numero è un numero
3) Numeri $\neq$ hanno successori $\neq$
4) $n\neq 0$ allora n è successore di un numero
5) $S\subseteq\mathbb{N}$ se $\begin{cases} 0\in S \\ n\in S \Rightarrow s(n)\in S \end{cases}$ allora $S=\mathbb{N}$

Esercizio

Dimostrare che $3^{1000} - 2^{500}$ è divisibile per 7

dim

Considero $f(n) = 3^{2n} - 2^{n}$

$f(1) = 9 - 2 = 7$

$f(2) = 81 - 4 = 77$ è divisibile per 7

Se $f(n)$ è divisibile per 7 $\qquad f(n) = 3^{2n} - 2^{n}$

allora $f(n+1)$ è divisibile per 7

$$f(n+1) = 3^{2n+2} - 2^{n+1} = 3^{2} \cdot 3^{2n} + 3^{2} \cdot 2^{n} - 3^{2} 2^{n} - 2 \cdot 2^{n}$$

$$= 3^{2}(3^{2n} - 2^{n}) + 2^{n}(3^{2} - 2)$$

$$= 9 \cdot f(n) + 2^{n} \cdot 7$$

ma $f(n)$ è divisibile per ipotesi

dunque $f(n+1)$ è divisibile per 7

$S = \{ n : f(n) = 3^{2n} - 2^{n}$ è divisibile per $7 \}$

$\Rightarrow S = \mathbb{N}$

In particolare $3^{1000} - 2^{500}$ è divisibile per 7 $\blacksquare$

Esempio

Dimostrare che $1+2+3+\dots+10^{36} = \frac{10^{36}\cdot(10^{36}+1)}{2}$

dim

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} = f(n)$$

Proveremo che vale $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad n \geq 1$

$f(1) = \frac{1\cdot(1+1)}{2} = 1$ quindi per $n=1$ è vero!!

Suppongo che $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} = f(n)$

ovvero che sia vero per n

Voglio provare che l'identità è vera per $n+1$

$$\underbrace{1+2+\dots+n}+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) = \frac{n(n+1)+2\cdot(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = f(n+1)$$

Dunque, per il Principio di Induzione, l'identità vale $\forall n \in \mathbb{N}$

Dunque vale, in particolare quando $n=10^{36}$ ▨

Oss IMPORTANTE

Il principio di induzione mi permette di provare che $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

ma non mi dice come costruire l'identità

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = S'$$

$$n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = S'$$

$$\underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{n \text{ volte}} = 2S'$$

$$n \cdot (n+1) = 2S' \Rightarrow S' = \frac{n(n+1)}{2}$$