La funzione modulo: $|x| = \max\{x, -x\}$

$$|x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$$

$|x| \geq 0$; $|x| = 0$ se $x = 0$

$|x| = |-x|$

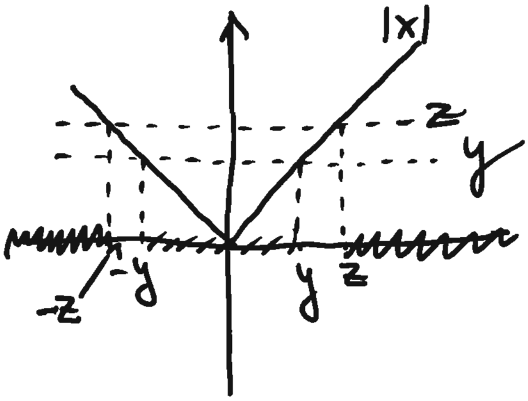
$-|x| \leq x \leq |x|$

$|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y$

$|x| \geq y \iff x \geq y$ o $-x \geq y$

$|x+y| \leq |x| + |y|$

$\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$



$$|x| = \begin{cases} x & x>0 \\ -x & x\le 0 \end{cases}$$

$$|x|\le y \iff -y\le x\le y$$

$$|x|\ge z \iff x\ge z \text{ o } -x\ge z$$

Esercizio

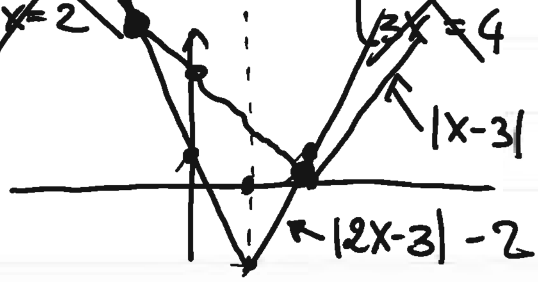
Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$|x-3| = |2x-3|-2$$

dim

$$\begin{cases} x-3\ge 0 \\ 2x-3\ge 0 \\ x-\cancel{3} = 2x-\cancel{3}-2 \end{cases} \quad \begin{cases} x-3\ge 0 \\ 2x-3<0 \\ x-3 = -2x+3-2 \end{cases} \quad \begin{cases} x-3<0 \\ 2x-3\ge 0 \\ 3-x = 2x-3-2 \end{cases} \quad \begin{cases} x-3<0 \\ 2x-3<0 \\ \cancel{3}-x = -2x+\cancel{3}-2 \end{cases}$$

$$\cancel{\begin{cases} x\ge 3 \\ x\ge 3/2 \\ x=2 \end{cases}} \quad \cancel{\begin{cases} x\ge 3 \\ x< 3/2 \\ 3x=4 \end{cases}} \quad \begin{cases} x<3 \\ x\ge 3/2 \\ \cancel{3}x = 8/\cancel{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x<3 \\ x<3/2 \\ x=-2 \end{cases}$$

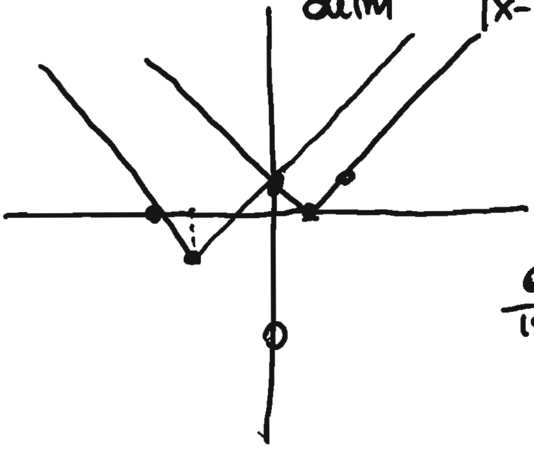


$$|2x-3|-2 = \begin{cases} 2x-5 & x\ge \frac{3}{2} \\ 1-2x & x<\frac{3}{2} \end{cases}$$

Esercizio

Determinare tutte le soluzioni di $|x-1| = |x+2| - 1$

dim



$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ 1-x & x < 1 \end{cases}$$

$$|x+2| - 1 = \begin{cases} x+1 & x \geq -2 \\ -x-3 & x < -2 \end{cases}$$

esiste un solo punto di intersezione tra i due grafici e questo è

Soluzione analitica

$$(*) \iff \cancel{\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ x-1 = x+2-1 \end{cases}} \quad \text{o} \quad \cancel{\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+2 < 0 \\ x-1 = -x-2-1 \end{cases}} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x-1 < 0 \\ x+2 \geq 0 \\ 1-x = x+2-1 \end{cases} \quad \text{o} \quad \cancel{\begin{cases} x-1 < 0 \\ x+2 < 0 \\ 1-x = -x-3 \end{cases}}$$

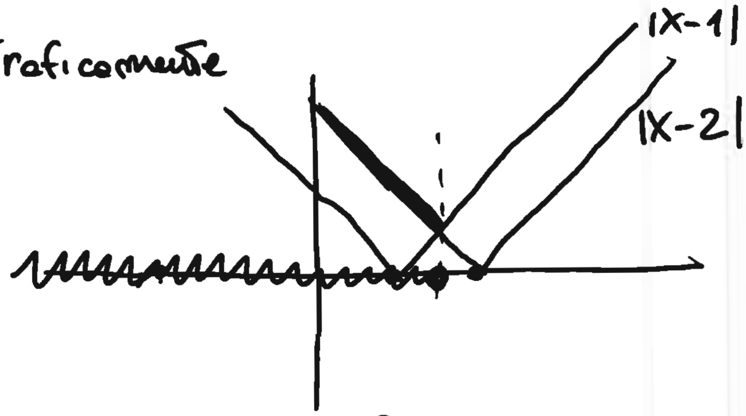
$$\iff \begin{cases} x < 1 \\ x \geq -2 \\ 2x = 0 \end{cases} \iff x = 0$$

Esercizio

Per quali valori di x $\quad |x-1| \le |x-2| \ (*)$

dim

Graficamente



$x \in \left]-\infty, \frac{3}{2}\right]$

Soluzione analitica

$$(*) \iff -|x-2| \le x-1 \le |x-2| \iff \begin{cases} -|x-2| \le x-1 \\ x-1 \le |x-2| \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} |x-2| \ge 1-x \\ |x-2| \ge x-1 \end{cases} \iff \begin{cases} x-2 \ge 1-x \\ |x-2| \ge x-1 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} 2-\cancel{x} \ge 1-\cancel{x} \\ |x-2| \ge x-1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x \ge 1 \\ \cancel{x}-2 \ge \cancel{x}-1 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} 2x \ge 1 \\ 2-x \ge x-1 \end{cases} \text{ o } \cancel{\begin{cases} 1 \ge 0 \\ \cancel{x}-2 \ge \cancel{x}-1 \end{cases}} \text{ o } \begin{cases} 1 \ge 0 \\ 2-x \ge x-1 \end{cases}$$

$$\iff \cancel{\begin{cases} x \ge 1/2 \\ -2 \ge -1 \end{cases}} \text{ o } \begin{cases} x \ge 1/2 \\ 3 \ge 2x \end{cases} \text{ o } \begin{cases} 1 \ge 0 \\ 3 \ge 2x \end{cases}$$

$$\iff \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2} \ \cup \ x \le \frac{3}{2} \iff x \le \frac{3}{2}$$

$$\iff x \in \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}\right] \text{ o } x \in \left]-\infty, \tfrac{3}{2}\right] \iff x \in \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}\right] \cup \left]-\infty, \tfrac{3}{2}\right]$$

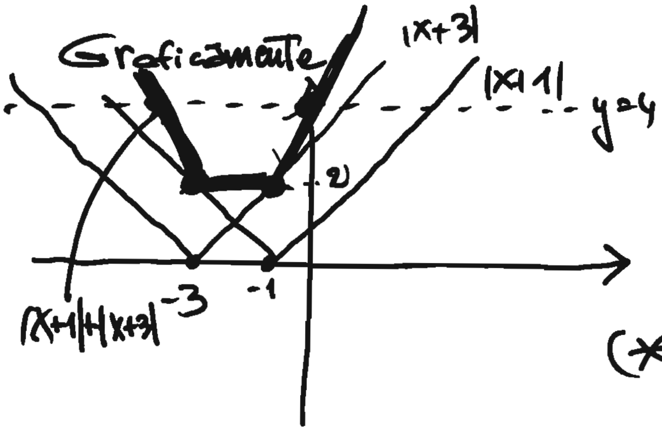
$$\iff x \in \left]-\infty, \tfrac{3}{2}\right]$$

Esercizio

Per quali valori di x $\quad |x+1|+|x+3|<4 \quad (*)$

dim

Graficamente



$x=0 \quad |0+1|+|0+3|=4$

$x=-4 \quad |-4+1|+|-4+3|=3+1=4$

e quindi

$(*) \iff x\in\,]-4,0[$

Analiticamente

$$(*) \iff \begin{cases} x+1\geq 0 \\ x+3\geq 0 \\ x+1+x+3<4 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x+1\geq 0 \\ x+3<0 \\ \cancel{x}+1-\cancel{x}-3<4 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x+1<0 \\ x+3\geq 0 \\ -\cancel{x}-1+\cancel{x}+3<4 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x+1<0 \\ x+3<0 \\ -x-1-x-3<4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x\geq -1 \\ x\geq -3 \\ 2x<0 \end{cases} \text{ o } \cancel{\begin{cases} x\geq -1 \\ x<-3 \\ -2<4 \end{cases}} \text{ o } \begin{cases} x<-1 \\ x\geq -3 \\ 2<4 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x<-1 \\ x<-3 \\ -\cancel{8}^{\,4}<\cancel{2}x \end{cases}$$

$$\iff x\in[-1,0[\text{ o } x\in[-3,-1[\text{ o } x\in\,]-4,-3[$$

$$\iff x\in[-1,0[\,\cup\,[-3,-1[\,\cup\,]-4,-3[\,=\,]-4,0[$$

Esercizio

Determinare le soluzioni di $\left|2x - |x^2-3|\right| < 1 \ (*)$

dim

Una via possibile

$$\begin{cases} x^2-3 \geq 0 \\ \left|2x - x^2+3\right| < 1 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x^2-3<0 \\ \left|2x+x^2-3\right| < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3 \geq 0 \\ 2x-x^2+3 \geq 0 \\ 2x-x^2+3<1 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x^2-3\geq 0 \\ 2x-x^2+3<0 \\ -2x+x^2-3<1 \end{cases} \quad \text{o} \quad \ldots$$

Proviamo utilizzando le proprietà della funzione $|x|$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 2x - |x^2-3| \\ 2x - |x^2-3| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x^2-3| < 2x+1 \\ 2x-1 < |x^2-3| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x-1 < x^2-3 \\ x^2-3 < 2x+1 \\ 2x-1 < x^2-3 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} -2x-1 < x^2-3 \\ x^2-3 < 2x+1 \\ 2x-1 < 3-x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-2>0 \\ x^2-2x-4<0 \\ x^2-2x-2>0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x^2+2x-2>0 \\ x^2-2x-4<0 \\ x^2+2x-4<0 \end{cases} \quad \underline{\text{per casa}}$$

Funzioni

Def Una funzione è una terna di oggetti

$f: A \to B$

dove A è detto dominio

B " " codominio

f è la legge che fa corrispondere a $\forall x \in A$

1 ed 1 solo $y \in B$

ovvero $\forall x \in A \ \underbrace{\exists!}_{\text{esiste 1 ed 1 solo}} y \in B : f(x) = y$

Esempio

$f: A \to B$ t.c. $f(1)=1$ $f(2)=4$ $f(3)=9$

è una funzione

mentre

$g: A \to B$ $g(1)=\{3,4\}$ $g(2)=4$

g non è una funzione perché 1 ha 2 immagini

Funzioni

Def Una funzione è una terna di oggetti

$f: A \to B$

dove A è detto dominio

B " " codominio

f è la legge che fa corrispondere a $\forall x \in A$

1 ed 1 solo $y \in B$

ovvero $\forall x \in A \ \underbrace{\exists!}_{\text{esiste 1 ed 1 solo}} \ y \in B : f(x) = y$

Esempio

$f: A \to B$ t.c. $f(1)=1$ $f(3)=9$
$f(2)=4$

è una funzione

mentre

$g: A \to B$ $g(1)=\{3,4\}$
$g(2) = 4$

g non è una funzione perché 1 ha 2 immagini

Def $f: A \to B$ si dice

iniettiva se $\forall x,y \in A \ \underbrace{x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)}$

suriettiva se $\forall y \in B \ \exists x \in A : f(x) = y$

biiettiva se è iniettiva e suriettiva

ovvero se $\forall y \in B \ \exists! \, x \in A : f(x) = y$

(f. si 1—1)

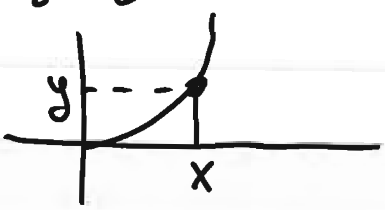
Esempio

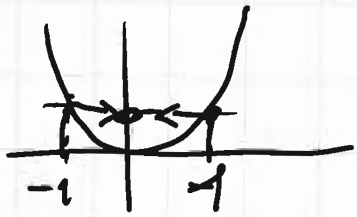
$f(x) = x^2 \qquad f: [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva

infatti: devo provare che $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

$$\begin{cases} x^2 = y^2 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \text{ o } \cancel{\begin{cases} x = -y \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}}$$

$x, y \in [0,+\infty[= A$





$f(x) = x^2 \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ questa NON è iniettiva infatti $-1 \longrightarrow (-1)^2 = 1 \qquad 1 \longrightarrow 1^2 = 1$