Analisi 1 - Lunedì 26 settembre 2016 - lezione 1

Analisi Matematica 1 - 12 C.F.U.

Marino Belloni
marino.belloni@unipr.it

Sulla pagina web (mia) : vecchi compiti con soluz.
lezioni
etc

elly : piattaforma per la didattica
esse3 : " " gli esami

Esercitazioni (tutoraggio) IDEA
Prof. A. Camobreco (matricole pari) Aula 8
Martedì 14.30-16.30
Giovedì 16.30-18.30

Prof.ssa D. Fiorani (matricole dispari)
Martedì Aula A 14.30-16.30
Giovedì " P 16.30-18.30

$\boxed{1^a \text{ scritto}}$ 7 domande a quiz con 4 risposte ciascuna

+3 corretta, -1 sbagliata $(-7 \leq \text{voto} \leq 21)$

Con voto ≥ 10 si passa al

$\boxed{2^o \text{ scritto}}$ 4 domande aperte
$(0 \leq \text{voto} \leq 40)$

$$\frac{\text{Voto 1} + \text{Voto 2}}{2} \geq 17$$ si passa alle prove

$\boxed{\text{Orale}}$

Compitini per l'esenzione dalla prova a quiz
1° ~ 17 novembre
2° ~ 16 dicembre

Voto 1° + Voto 2° $\geq$?
Esentati dalla prova Quiz fino al 1° marzo 2017

Numeri $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} + \mathbb{C}$
Estremo superiore/inferiore
limite
Continuità
Derivabilità
Sviluppi di Taylor
Integrazione propria e impropria
Successioni e Serie numeriche
Integrali impropri

Grammatica : imparare le definizioni ////
Sintassi : formare le proposizioni
" " dimostrazioni

Studiare (come) è una cosa personale, ovvero si studia da soli

Capire le cose può (per il 70-80% degli studenti) è una cosa condivisibile

Scrivere le cose più volte cercando di capire

Avvertenze: non ci sono le interrogazioni, compiti in classe etc che servono a tenere "sotto battuta" gli studenti

Iniziare a studiare ORA!!

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \quad b \neq 0 \right\}$ $\quad \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$

Teorema

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Ci poniamo la seguente domanda:

come sapere se un polinomio a coeff. in $\mathbb{Z}$

$$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = P_n(x) \qquad a_i \in \mathbb{Z}, \; i = 0 \dots n$$

di grado n

possiede soluzioni razionali?

Affinché p/q sia soluzione di $P_n(x)=0$

deve accadere che

$$0=P_n\left(\frac{p}{q}\right)=a_n\cdot\frac{p^n}{q^n}+a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}+\dots+a_1\frac{p}{q}+a_0=0$$

$q\neq 0$ $\quad a_n p^n+a_{n-1}p^{n-1}\cdot q+a_{n-2}p^{n-1}q^2+\dots+a_1 p\cdot q^{n-1}+a_0\cdot q^n=0$

$$a_n p^n+a_{n-1}p^{n-1}\cdot q+a_{n-2}p^{n-1}q^2+\dots+a_1 p\cdot q^{n-1}=-a_0 q^n$$

$$p\left(a_n p^{n-1}+a_{n-1}p^{n-2}q+\dots+a_1 q^{n-1}\right)=-a_0 q^n$$

$\Rightarrow p$ divide $a_0 q^n \Rightarrow p$ divide a_0

Lemma

Se $p/q\in\mathbb{Q}$ è soluzione di $a_n x^n+\dots+a_1 x+a_0=0$

allora p divide a_0

Se $\frac{p}{q}$ è soluzione di $P_n(x)=0$ allora

$$\frac{p^n}{q^n}a_n+\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}a_{n-1}+\dots+a_1\frac{p}{q}+a_0=P_n\left(\frac{p}{q}\right)=0$$

$q\neq 0$ $\quad p^n a_n+p^{n-1}\cdot q\cdot a_{n-1}+\dots+a_1 p q^{n-1}+a_0 q^n=0$

$$-a_n p^n=a_{n-1}p^{n-1}q+a_{n-2}p^{n-2}q^2+\dots+a_1 p q^{n-1}+a_0 q^n$$

$$=q\left(a_{n-1}p^{n-1}+a_{n-2}p^{n-2}q+\dots+a_1 p q^{n-2}+a_0 q^{n-1}\right)$$

$\Rightarrow q$ divide $a_n p^n \Rightarrow q$ divide a_n

ma p e q non hanno divisori comuni

Lemma 2)

Se p/q è radice di $P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$

allora q divide a_n

Esempio

Trovare le soluzioni razionali di $x^2+3x+2=0$

dim

$a_2 = 1 \qquad a_0 = 2$ i divisori di a_2 sono ± 1

" " " a_0 " ± 1 e ± 2

$\Rightarrow$ le soluz. razionali sono $\frac{\pm 1}{\pm 1}$ e $\frac{\pm 2}{\pm 1}$

ovvero ± 1 e ± 2

$P_2(x) \qquad P_2(1) = 1^2 + 3\cdot 1 + 2 \neq 0 \qquad P_2(-1) = (-1)^2 + 3\cdot(-1) + 2 = 0$

$P_2(2) = 2^2 + 3\cdot 2 + 2 \neq 0 \qquad P_2(-2) = (-2)^2 + 3(-2) + 2 = 0$

$\Rightarrow$ -1 e -2 sono soluzioni $\Rightarrow x^2+3x+2 = (x+2)(x+1)$ $\boxed{/\!/\!/}$

Teorema

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

dim

prendiamo $x^2 - 2 = P_2(x)$: $P_2(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 2 = 0$

ovvero $\sqrt{2}$ è soluzione di $x^2-2=0$

Ma le soluzioni razionali (in questo caso intere poiché $a_2=1$) sono, se ne esistono, da ricercare tra i divisori di -2, che sono ± 1 e ± 2

Ma ± 1 e ± 2 non sono soluzioni e quindi
$\nexists$ nessuna radice razionale di $x^2-2=0$
$\Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ $\boxed{///}$

Precisazione : $a_i \in \mathbb{Z}$ $i=0,\dots,n$ sono i coefficienti del polinomio e, in generale, $a_i \neq a_j$ se $i \neq j$

Osservazione Il lemma 1 e il lemma 2 servono per individuare le soluzioni razionali che però possono non esistere (Per esempio $x^2-2=0$ <u>non</u> <u>ha</u> soluz. razionali)

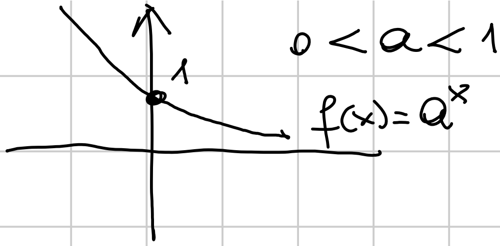
DISEQUAZIONI ESPONENZIALI e LOGARITMICHE

Def Data una funzione $f: A \to B$, questa si dice

strettamente crescente se $\forall x,y \in A$ $[x<y \Rightarrow f(x)<f(y)]$
debolmente " se " $[x<y \Rightarrow f(x)\leq f(y)]$
strettamente decrescente se " $[x<y \Rightarrow f(x)>f(y)]$
debolmente " se " $[x<y \Rightarrow f(x)\geq f(y)]$

Esempio

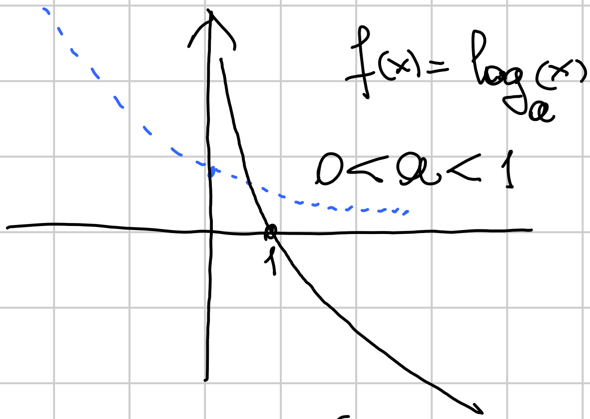
$$f(x) = a^x \quad \begin{cases} \text{se } 0<a<1 & \text{allora è strett. decrescente} \\ \text{se } 1<a & \text{" " " crescente} \end{cases}$$

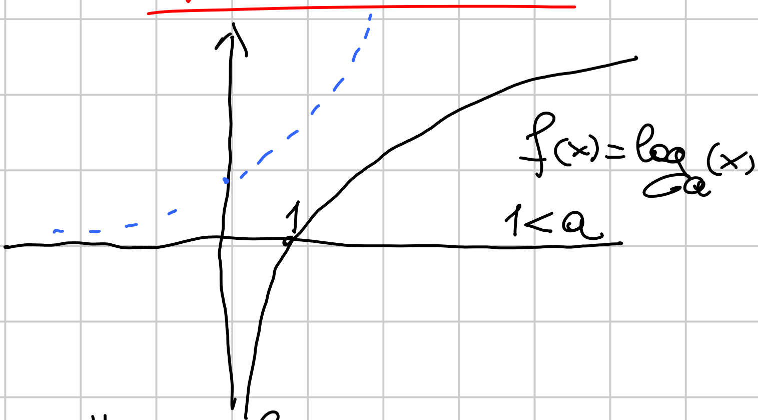


$$g(x)=\log_a x=\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

$$\boxed{\ln(x)=\log_e(x)}$$

$e=2{,}71\ldots$





$$f(x)=\log_a(x)\begin{cases}\text{se } 0<a<1 \text{ allora } f(x) \text{ è descrescente strett.}\\ \text{se } 1<a \quad '' \quad '' \quad '' \text{ crescente } ''\end{cases}$$

Esercizio

Per quali valori di x $\quad 25^{2x^2-4}>5^{10-2x^2-12x}$

dim

$$25^{2x^2-4}>5^{2(5-x^2-6x)}=25^{5-x^2-6x}$$

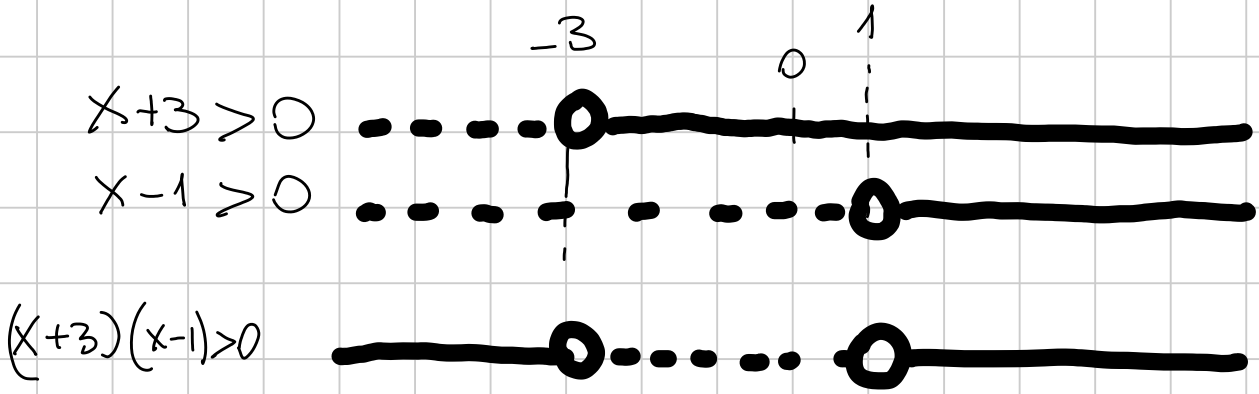
$25>1 \Rightarrow f(y)=25^y$ è crescente strettamente

$\Rightarrow$ [se $25^{2x^2-4}>25^{5-x^2-6x}$ allora $2x^2-4>5-x^2-6x$]

Devo quindi risolvere la disequazione ALGEBRICA

$$2x^2-4>5-x^2-6x$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+6x-9=3(x^2+2x-3)=3(x+3)(x-1)>0$$



$$x \in \left]-\infty, -3\right[\cup \left]1, +\infty\right[$$

$$\Updownarrow$$

$$x < -3 \quad \text{o'} \quad 1 < x$$

Esercizio

Per quali valori di x $\quad \boxed{\ln(x+1) + \ln(x-2) \le \ln(10)} \; *$

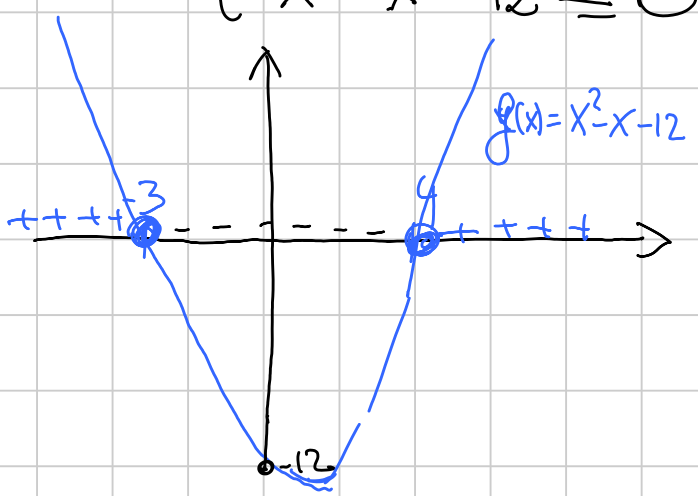
dim

$f(y) = \ln(y) = \log_e(y) \qquad e = 2{,}7\cdots > 1$

è strettamente crescente

$$(*) \iff \begin{cases} x+1>0 \\ x-2>0 \\ \ln[(x+1)(x-2)] \le \ln(10) \end{cases} \iff \begin{cases} x>-1 \\ x>2 \\ (x+1)(x-2) \le 10 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x>2 \\ x^2-x-12 \le 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>2 \\ (x-4)(x+3) \le 0 \end{cases}$$



$$\iff \begin{cases} x>2 \\ -3 \le x \le 4 \end{cases}$$

$$\iff 2 < x \le 4$$

$$\iff x \in \left]2, 4\right]$$

Esercizio

Per quali valori di x $\frac{7^{x-2}}{4} < \frac{7}{21+\sqrt{7^x}}$

dim

$$7^{x-2}\cdot 21 + 7^{x-2+x/2} < 4\cdot 7$$

$$7^x\cdot\frac{21}{49} + \frac{7^{\frac{3}{2}x}}{49} - 4\cdot 7 < 0$$

$$7^x\cdot 21 + 7^{\frac{3}{2}x} - 4\cdot 7^3 < 0$$

Conviene porre $7^{x/2} = y$

$$y^3 + 3\cdot 7\cdot y^2 - 4\cdot 7^3 < 0$$

$a_3 = 1$ $\quad a_2 = 3\cdot 7$ $\quad a_0 = -4\cdot 7^3$ $\qquad \pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 7; \pm 7^2; \pm 7^3$

$7^3 + 3\cdot 7^3 - 4\, 7^3 = 0 \Rightarrow$ 7 è una radice

$\Rightarrow (y-7)$ divide $y^3+21y^2-4\cdot 7^3$

$$\begin{array}{lll|l}
y^3 + 21y^2 & & -4\cdot 7^3 & y-7 \\
\cline{4-4}
y^3 - 7y^2 & & & y^2+28y+4\cdot 7^2 \\
\cline{1-3}
// \quad 28y^2 & & -28\cdot 7^2 & \\
\quad 28y^2 & -4\cdot 7^2 y & & \\
\cline{2-3}
\quad // & 4\cdot 7^2\cdot y & -4\cdot 7^3 & \\
 & 4\cdot 7^2 y & -4\cdot 7^3 & \\
\cline{2-3}
 & // & &
\end{array}$$

$$y^3+21y^2-4\cdot 7^3 = (y-7)(y^2+28y+4\cdot 7^2)$$

$$\Delta = (14)^2 - 4\cdot 49 = 196 + 196$$

$$y^3+21y^2-4 7^3 = (y-7)(y+14)^2$$

$y^3+21y^2-4 7^3 < 0 \iff y < 7$ e $y \neq -14$

196
196

$\iff 7^{x/2} < 7$ e $7^{x/2} \neq -14$ sempre verificata

$\Leftrightarrow \frac{x}{2} < 1 \Leftrightarrow \boxed{x < 2}$

$$7^{x-2} = 7^x \cdot 7^{-2}$$

$$= \frac{7^x}{7^2}$$