Analisi Matematica 1 - Ingegneria Gestionale a.a. 2015/16

Prova Scritta del 20 settembre 2016

Correzione

1ª parte: quiz a risposta multipla

(1) Un sacchetto contiene 8 palline rosse e 4 nere. Pescando a caso 3 palline, qual è la probabilità che siano tutte rosse?

(A) $8/12$.

(B) $\frac{8}{12}+\frac{7}{11}+\frac{6}{10}$.

(C) $14/55$.

(D) $8!/12!$.

1° modo $P(\text{3 palline rosse}) = \frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{6}{10} = \frac{14}{55}$

$8/12$ = prob. che esca pallina rossa alla 1ª estrazione

$7/11$ = " " " " " " 2ª "

$6/10$ = " " " " " " 3ª "

2° modo: Casi possibili $= \binom{12}{3}$ ovvero quanti sottoinsiemi di 3 palline esistono, presi da un insieme di 12 el.ti

Casi favorevoli $= \binom{8}{3}$ quanti sono i sottoinsiemi di 3 palline <u>rosse</u> esistono, presi da un insieme di 8 elementi

$$P(\text{3 palline rosse}) = \binom{8}{3}\Big/\binom{12}{3} = \frac{8!}{5!}\,\frac{9!}{12!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8}{10\;11\;12} = \frac{14}{55}$$

La risposta corretta è la (C)

(2) La serie $\sum_n \left(\frac{|\alpha+1|+|\alpha-2|}{4}\right)^n$ converge

(A) per nessun valore di α .

(B) quando $-3/2 < \alpha < 5/2$.

(C) quando $-5/2 < \alpha < 3/2$.

(D) quando $-2 < \alpha < 3$.

$$|\alpha+1| = \begin{cases} \alpha+1 & \text{se } \alpha \geq -1 \\ -\alpha-1 & \text{se } \alpha < -1 \end{cases} \qquad |\alpha-2| = \begin{cases} \alpha-2 & \text{se } \alpha \geq 2 \\ 2-\alpha & \text{se } \alpha < 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad |\alpha+1| + |\alpha-2| = \begin{cases} 2\alpha-1 & \text{se } \alpha \geq 2 \\ 3 & \text{se } -1 \leq \alpha < 2 \\ 1-2\alpha & \text{se } \alpha < -1 \end{cases}$$

$$\frac{|\alpha+1|+|\alpha-2|}{4} = 1 \quad \text{se} \quad \begin{cases} \frac{2\alpha-1}{4} = 1 \\ \alpha > 2 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \frac{1-2\alpha}{4} = 1 \\ \alpha < -1 \end{cases}$$

$$1-2\alpha = 4$$
$$2\alpha = -3$$

se $\alpha = 5/2$ o $\alpha = -3/2$

La serie converge se $\frac{|\alpha+1|+|\alpha-2|}{4} < 1$ se $-\frac{3}{2} < \alpha < \frac{5}{2}$

La risposta corretta è la (B)

(3) Il limite $\lim_{x\to 0+} \frac{x - \sqrt{1-\cos(\sqrt{2}\,x)}}{x^3}$ vale

(A) 1 .

(B) 1/12 .

(C) 0 .

(D) $+\infty$.

$$\cos(\sqrt{2}x) = \cos^2(x/\sqrt{2}) - \operatorname{sen}^2(x/\sqrt{2}) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(x/\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow 2\operatorname{sen}^2(x/\sqrt{2}) = 1 - \cos(\sqrt{2}x)$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sqrt{1-\cos(\sqrt{2}x)}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \sqrt{2}\operatorname{sen}(x/\sqrt{2})}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} - \sqrt{2}\left(\cancel{\frac{x}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{6}\frac{x^3}{2\sqrt{2}} + o(x^4)\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3/12 + o(x^4)}{x^3}$$

$= 1/12$. La risposta corretta è la (B)

(4) Sia S l'insieme delle soluzioni della disequazione $\sqrt{x^2-2x-3} \leq \sqrt{9-x}$. Allora

(A) $S = [3,4]$.

(B) $0 \in S$.

(C) S non è limitato inferiormente.

(D) $]-3,-1[\subset S$.

La disequazione equivale a

$$\begin{cases} x^2-2x-3 \geq 0 \\ 9-x \geq 0 \\ x^2-2x-3 \leq 9-x \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-3)(x+1) \geq 0 \\ 9 \geq x \\ x^2-x-12 \leq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \in]-\infty,-1] \cup [3,+\infty[\\ x \in]-\infty, 9] \\ (x-4)(x+3) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in]-\infty,-1] \cup [3,9] \\ x \in [-3,4] \end{cases}$$ e dunque $x \in [-3,-1] \cup [3,4]$

La risposta corretta è la (D)

(5) Se $z = 3-\mathrm{i}$ e $w = \dfrac{\bar{z}+3\bar{z}^2}{|z|^2-2\bar{z}}$, allora

(A) $w \in \mathbb{R}$.

(B) $w = 7/2 + 13\mathrm{i}/2$.

(C) $w = 7/2 - 13\mathrm{i}/2$.

(D) $\Re w = 7$.

$$w = \frac{\overline{(3-i)} + 3\,\overline{(3-i)}^2}{|3-i|^2 - 2\,\overline{(3-i)}} = \frac{3+i+3(3+i)^2}{(9+1)-2(3+i)} = \frac{\cancel{3}+i+27-\cancel{3}+18i}{4-2i}$$

$$= \frac{27+19i}{4-2i}\,\frac{4+2i}{4+2i} = \frac{108+76i+54i-38}{20} = \frac{70}{20}+\frac{130}{20}i$$

$$= \frac{7}{2}+\frac{13}{2}i$$ La risposta corretta è la (B).

(6) La successione $\dfrac{\log(n^3+n^2)}{\log(n^2+n)}$ ha limite

(A) $+\infty$.

(B) 0 .

(C) $3/2$.

(D) $2/3$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n^3+n^2)}{\ln(n^2+n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(n^3\left(1+1/n\right)\right)}{\ln\left(n^2\left(1+1/n\right)\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n^3)+\ln(1+1/n)}{\ln(n^2)+\ln(1+1/n)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n^3)+o(1)}{\ln(n^2)+o(1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3\ln(n)}{2\ln(n)} = \frac{3}{2}.$$

La risposta corretta è la (C).

N.B. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^3+x^2)}{\ln(x^2+x)} \underset{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^3+x^2}\cdot(3x^2+2x)}{\frac{1}{x^2+x}\cdot(2x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x}{x^3+x^2}\cdot\frac{3x^2+2x}{2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4\cdot(1+1/x)(1+2/3x)}{2x^4\,(1+1/x)(1+1/2x)} = \frac{3}{2}$$

(7) L'immagine di $[-1,3]$ tramite la funzione $f(x) = -x^3+3x+1$ è l'intervallo

(A) $[-17,3]$.

(B) $[-17,-1]$.

(C) $[-1,3]$.

(D) $]-\infty,+\infty[$.

$f(-1) = -(-1)^3+3(-1)+1 = 1-3+1 = -1$

$f(3) = -(3)^3+3\cdot 3+1 = -27+10 = -17$

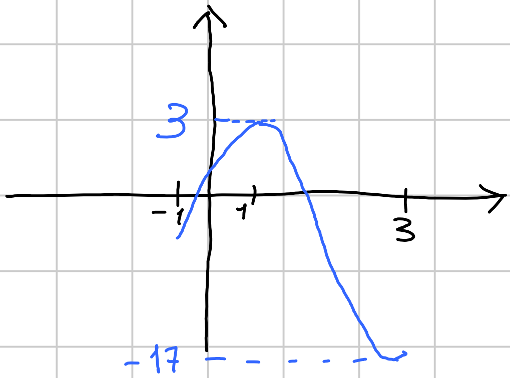
$f' = -3x^2+3 = 0$ se $x = \pm 1$ $\qquad f' \begin{cases} >0 & \text{se } x<-1 \\ <0 & \text{se } -1<x<1 \\ >0 & \text{se } 1<x \end{cases}$

e quindi $x=-1$ è un max locale $f(-1) = -1$

$x=1$ " " min locale $f(1) = -1+3+1 = 3$

Dunque il grafico di f in $[-1,3]$ è quello di figura e

$f([-1,3]) = [-17,3]$



La risposta corretta è la (A).

2ª parte: esercizi a risposta aperta

Determinate le soluzioni (z, w), con $z, w \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} \bar{z}^2 - w^2 = -1 \\ \bar{w}^2 - z = 0\,. \end{cases}$$

Il sistema equivale al seguente

$$\begin{cases} \bar{z} = w^2 \\ w^4 - w^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

posto $t = w^2$ $\quad t^2 - t + 1 = 0$ ha soluzione

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$t_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{5}{3}\pi\right) \Rightarrow \begin{array}{l} w_1 = \cos \frac{5}{6}\pi + i \operatorname{sen} \frac{5}{6}\pi \\ w_2 = \cos \frac{11}{6}\pi + i \operatorname{sen} \frac{11}{6}\pi \end{array}$$

$$t_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} w_3 = \cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \\ w_4 = \cos \frac{7}{6}\pi + i \operatorname{sen} \frac{7}{6}\pi \end{array}$$

$$\begin{cases} w_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \\ z_1 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{cases} \qquad \begin{cases} w_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \\ z_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \\ z_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{cases} \qquad \begin{cases} w_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \\ z_4 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{cases}$$

Sia $f(x) = \sqrt{4 - x^2} - x$.

a) Determinate il dominio di f, i limiti di f e f' agli estremi del dominio, il segno, gli intervalli di monotonia. Disegnate poi il grafico di f.

b) Determinate, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

Il dominio $\Omega = \{x : 4 - x^2 \geq 0\} = [-2, 2]$. La funzione è continua in $[-2, 2]$ e quindi $\lim_{x \to \pm 2} f(x) = f(\pm 2) = \mp 2$

La derivata $f' = \dfrac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{4 - x^2}} - 1$ è definita in $\Omega \setminus \{\pm 2\}$

e si ha $\lim_{x \to -2^+} f'(x) = \left(\dfrac{-(-2)}{\sqrt{0^+}} - 1\right) = +\infty$ $\quad \lim_{x \to 2^-} f'(x) = \left(\dfrac{-2}{\sqrt{0^+}} - 1\right) = -\infty$

$f'=0$ se $-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}-1=0$ se $-x-\sqrt{4-x^2}=0$

se $x=-\sqrt{4-x^2}$ se $\begin{cases}x^2=4-x^2\\ x<0\end{cases}$

se $\begin{cases}x=\pm\sqrt{2}\\ x<0\end{cases}$ se $x=-\sqrt{2}$

ed essendo $f'(x)\begin{cases}>0 & -2<x<-\sqrt{2}\\ <0 & -\sqrt{2}<x<2\end{cases}$

si ha che $x=-\sqrt{2}$ pto di max $f(-\sqrt{2})=\sqrt{4-2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

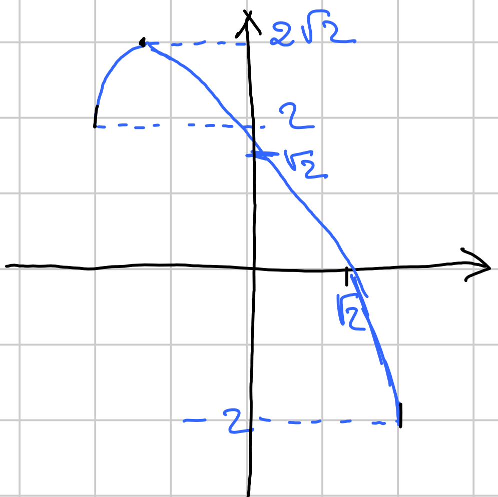
Inoltre $f(x)=\sqrt{4-x^2}-x=0 \iff x=\sqrt{4-x^2} \iff \begin{cases}x^2=4-x^2\\ x=\sqrt{2}\end{cases}$

$\iff x=\sqrt{2}$ ovvero $f(\sqrt{2})=0$

Infine $f''(x)=\left(-\frac{x}{(4-x^2)^{1/2}}-1\right)'=-\frac{1}{(4-x^2)^{1/2}}-x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(4-x^2)^{-3/2}\cdot(-2x)$

$$=-\frac{1}{(4-x^2)^{1/2}}-\frac{x^2}{(4-x^2)^{-3/2}}=\frac{-4+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}}{(4-x^2)^{-3/2}}<0$$

ovvero f è concava $\forall x\in\Omega\setminus\{\pm 2\}$



Le soluzioni dell'eq. $f(x)=k$ sono

0 quando $k<-2$ o $2\sqrt{2}<k$

1 " $-2\le k<2$ o $2\sqrt{2}=k$

2 " $2\le k<2\sqrt{2}$

Abbiamo sfruttato la stretta monotonia di f negli intervalli
$[-2,-\sqrt{2})$; $[-\sqrt{2},0)$; $[0,2]$

ovvero $f:[-2,-\sqrt{2})\longrightarrow[2,2\sqrt{2})$ è biiettiva

$f:[-\sqrt{2},0)\longrightarrow(\sqrt{2},2\sqrt{2}]$ " " etc

Siano date le funzioni

$$f(x) = \log(\operatorname{sen} x + \cos x)\,, \qquad g(x) = \frac{1}{2}(e^{-2x} - 1)\,.$$

a) Calcolate gli sviluppi di Taylor di ordine 4 e centrati in $x_0 = 0$ di $f(x)$ e di $g(x)$.
b) Trovate l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ della funzione somma $f(x) + g(x)$.
c) Calcolate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)+g(x)}{x^\alpha}\,.$$

$$f(x) = \ln(\operatorname{sen} x + \cos x) = \ln\left(x - \frac{x^3}{6} + 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = \qquad \underline{\text{quando } x \to 0}$$

$$= \left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^2}{2}\right)^3 - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\left(x^2 - x^3 + \frac{x^4}{4} - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(x^3 - \frac{3}{2}x^4\right) - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$= x - x^2 + x^3\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + x^4\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + o(x^4)$$

$$= x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(e^{-2x} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\cancel{1} - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 \cancel{-1}\right) + o(x^4)$$

$$f(x) + g(x) = \cancel{x} - \cancel{x^2} + \cancel{\frac{2}{3}x^3} - \frac{2}{3}x^4 \cancel{-x} + \cancel{x^2} - \cancel{\frac{2}{3}x^3} + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$= -\frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

$f(x) + g(x)$ è infinitesimo di ordine 4 e $pp = -\frac{x^4}{3}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)+g(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{3}\cdot x^{4-\alpha}\cdot(1 + o(1))$$

$$= \begin{cases} 0^- & \text{se } \alpha < 4 \\ -1/3 & \text{se } \alpha = 4 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 4 \end{cases}$$

Calcolate l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_{1/4}^{+\infty} (\sqrt{x}+1)\, e^{-\sqrt{x}}\, dx$ **.**

$$\int (\sqrt{x}+1)\, e^{-\sqrt{x}}\, dx \underset{t=\sqrt{x}}{=} \left(\int (t+1)\, e^{-t}\cdot 2t\, dt\right)_{t=\sqrt{x}} = 2\left(\int (t^2+t)\, e^{-t}\, dt\right)_{t=\sqrt{x}}$$

$t^2 = x$

$2t\,dt = dx$

$$= (-2x-6\sqrt{x}-3)\, e^{-\sqrt{x}} + c$$

$c \in \mathbb{R}$

$$\int (t^2+t)\, e^{-t}\, dt = -t^2 e^{-t} - t e^{-t} + \int e^{-t}\cdot(2t+1)\, dt =$$

$$= -t^2 e^{-t} - t e^{-t} - e^{-t} - 2t e^{-t} + \int 2 e^{-t}\, dt$$

$$= -t^2 e^{-t} - 3t e^{-t} - e^{-t} - 2 e^{-t} + c = (-t^2-3t-3)\, e^{-t} + c$$

Dunque $\displaystyle\int_{1/4}^{+\infty} (\sqrt{x}+1)\, e^{-\sqrt{x}}\, dt = \lim_{M\to+\infty} \Big[(-x-3\sqrt{x}-3)\, e^{-\sqrt{x}}\Big]_{x=1/4}^{x=M} =$

$$= \lim_{M\to+\infty} (-M-3\sqrt{M}-3)\, e^{-\sqrt{M}} + \left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}+3\right) e^{-1/2}$$

$$= \frac{19}{4\sqrt{e}}$$

Osserviamo che $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} -M\cdot e^{-\sqrt{M}} = -\lim_{M\to+\infty} \frac{M}{e^{\sqrt{M}}} = -\lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{e^t}$

$$\overset{(H)}{=} -\lim_{t\to+\infty} \frac{2t}{e^t} \overset{(H)}{=} -\lim_{t\to+\infty} \frac{2}{e^t} = 0^-$$

$$\Rightarrow \lim_{M\to+\infty} -\sqrt{M}\, e^{-\sqrt{M}} = 0$$