Analisi Matematica 1 - Ingegneria Gestionale a.a. 2015/16

Prova Scritta del 6 settembre 2016

Correzione

1ª parte: quiz a risposta multipla

(1) Se z e w sono due numeri complessi tali che $zw \in \mathbb{R}$ e $z \neq 0$ allora

(A) $w \neq 0$.

(B) $\Re z = \Re w = 0$.

(C) $w/\bar{z} \in \mathbb{R}$.

(D) $z, w \in \mathbb{R}$.

(A) è falsa: si prendano per esempio $z = 1 \neq 0$, $w = 0$ e si ha $z \cdot w \in \mathbb{R}$

(B) " " : " " " $z = w = i$

(C) VERA $\begin{cases} w/\bar{z} \in \mathbb{R} \\ z \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{w \cdot z}{|z|^2} \in \mathbb{R} \\ z \neq 0 \end{cases}$ ma $|z|^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow z \cdot w \in \mathbb{R}$

(D) è falsa: si prendano $z = w = i$

(2) Il valore di $\int_1^3 x e^x \, dx$ è

(A) $3e^3 - e$.

(B) $e - 3$.

(C) $2e^3$.

(D) $e^3 - 1$.

$$\int_1^3 x e^x dx = \left[x e^x\right]_1^3 - \int_1^3 e^x dx = 3e^3 - e - \left[e^x\right]_1^3 = 3e^3 - \cancel{e} - e^3 + \cancel{e}$$

$= 2e^3 \Rightarrow$ la risposta corretta è la (C).

(3) I valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione

$$f(x) = \begin{cases} a e^x - b \operatorname{sen} x & \text{se } x \leq 0 \\ 2a \cos x + 3b \cos(2x) + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

risulta derivabile su tutto $\mathbb{R}$ sono

(A) $a = b = -1/4$.

(B) $a = b = 1/3$.

(C) $a = -1$, $b = 0$.

(D) $a = 2$, $b = -1$.

Continuità in $x=0$: $\lim_{x \to 0^-} f(x) = a e^0 - b \operatorname{sen}(0) = a = 2a + 3b + 1 = \lim_{x \to 0^+} f$

ovvero $a + 3b + 1 = 0$

la derivata di f è $f' = \begin{cases} ae^x - b\cos x & \text{se } x<0 \\ -2a\,\text{sen}\,x - 6b\,\text{sen}(2x) & \text{se } x>0 \end{cases}$

e devo imporre $\lim_{x\to 0^-} f' = ae^0 - b\cos(0) = a-b = 0 = -2a\,\text{sen}(0) - 6b\,\text{sen}(0)$
$= \lim_{x\to 0^+} f'$

e dunque f derivabile in $x=0$ se $\begin{cases} a+3b+1=0 \\ a=b \end{cases}$ se $\begin{cases} 4b=-1 \\ a=b \end{cases}$

e dunque $a=b=-1/4 \Rightarrow$ la risposta corretta è la (A)

(4) Il limite della successione $\dfrac{\sqrt[n]{n+\text{sen}\,n} - \sqrt[n]{n^n + (1/n!)}}{\text{sen}\,\frac{2n+1}{n^2-2}}$ vale

(A) -1 .
(B) 0 .
(C) $-1/2$.
(D) $-\infty$.

$$a_n = \frac{\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{1+\frac{\text{sen}\,n}{n}} - n\sqrt[n]{1+\frac{1}{n!\,n^n}}}{\text{sen}\,\frac{2n+1}{n^2-2}} \sim \frac{-n}{\frac{2n+1}{n^2-2}} \sim -\frac{n}{\frac{1}{n}} = -n^2$$
per $n\to+\infty$

e dunque $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \Rightarrow$ la risposta corretta è la (D)

(5) I valori di $\alpha\in\mathbb{R}$ per i quali converge l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2+x^{3\alpha}}{x^2+x^{5\alpha}}\,dx$ sono

(A) $\alpha > 2/5$.
(B) $\alpha > 1/2$.
(C) $\alpha > 3/5$.
(D) $\alpha > 2/3$.

Quando $x\to+\infty$ $f(x) = \dfrac{x^2+x^{3\alpha}}{x^2+x^{5\alpha}} \sim \dfrac{x^{\max\{2,3\alpha\}}}{x^{\max\{2,5\alpha\}}}$

e l'integrale converge ~~se~~ $\beta = \max\{2,5\alpha\} - \max\{2,3\alpha\} > 1$

1) $5\alpha \le 2 \Rightarrow 3\alpha \le 2 \Rightarrow \int_1^{+\infty} f\,dx = +\infty$

2) $5\alpha > 2$ e $3\alpha \le 2 \iff \frac{2}{5} < \alpha \le \frac{2}{3}$ Si ha

$$\begin{cases} \beta = 5\alpha - 2 > 1 \\ \frac{2}{5} < \alpha \le \frac{2}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} 5\alpha > 3 \\ \frac{2}{5} < \alpha \le \frac{2}{3} \end{cases} \iff \boxed{\frac{3}{5} < \alpha \le \frac{2}{3}}$$

in questo intervallo $\int_1^{+\infty} f \in \mathbb{R}$

3) $5\alpha > 2$ e $3\alpha > 2 \iff \alpha > \frac{2}{3}$ Si ha

$$\begin{cases} \beta = 5\alpha - 2\alpha = 3\alpha > 1 \\ \alpha > \frac{2}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha > \frac{1}{3} \\ \alpha > \frac{2}{3} \end{cases} \iff \boxed{\alpha > \frac{2}{3}}$$

e in questo intervallo $\int_1^{+\infty} f\,dx \in \mathbb{R}$

Dunque $\int_1^{+\infty} f\,dx \in \mathbb{R}$ se $\alpha > \frac{3}{5}$. $\Rightarrow$ la risposta corretta è la (C)

(6) Sia S l'insieme delle soluzioni $x \in \mathbb{R}$ della disequazione $4\cos^2 x + 2(\sqrt{3}-1)\operatorname{sen} x \ge 4 - \sqrt{3}$. Allora

(A) $[-\pi/3, \pi/6] \subset S$.

(B) S è limitato inferiormente.

(C) $\pi/2 \in S$.

(D) $[2\pi/3, 7\pi/6] \subset S$.

$4(1-\operatorname{sen}^2 x) + 2(\sqrt{3}-1)\operatorname{sen} x = 4 - 4\operatorname{sen}^2 x + 2(\sqrt{3}-1)\operatorname{sen} x \ge 4 - \sqrt{3}$

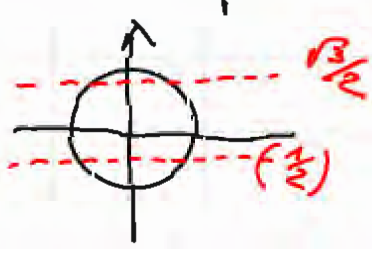
equivale a $-4\operatorname{sen}^2 x + 2(\sqrt{3}-1)\operatorname{sen} x + \sqrt{3} \ge 0$

" " $4\operatorname{sen}^2 x - 2(\sqrt{3}-1)\operatorname{sen} x - \sqrt{3} \le 0$

Posto $y = \operatorname{sen} x$ $\quad 4y^2 - 2(\sqrt{3}-1)y - \sqrt{3} \le 0$ se

$$\frac{1}{4}\left((\sqrt{3}-1) \pm \sqrt{3+1-2\sqrt{3}+4\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}-1 \pm (\sqrt{3}+1)\right) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

e dunque $-\frac{1}{2} \le \operatorname{sen} x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ e dunque (in $[0, 2\pi]$)



$0 \le x \le \frac{\pi}{3}$ o $\frac{2}{3}\pi \le x \le \frac{7}{6}\pi$ o $\frac{11}{6}\pi \le x \le 2\pi$

Dunque $\left[\frac{2}{3}\pi, \frac{7}{6}\pi\right] \subseteq S$. $\Rightarrow$ la risposta corretta è la (D)

(7) I valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali converge $\sum_n (|\alpha - 1|^n + |\alpha - 2|^n)$ sono

(A) non converge mai.

(B) $-2 < \alpha < 1$.

(C) $-3 < \alpha < 2$.

(D) $-1 < \alpha < 0$.

La serie converge se convergono $\sum_n |\alpha-1|^n$ e $\sum_n |\alpha+2|^n$

(sono tutte serie a termini positivi!!)

$\sum_n |\alpha-1|^n \in \mathbb{R}$ se $-1<\alpha-1<1$ se $0<\alpha<2$

$\sum_n |\alpha+2|^n \in \mathbb{R}$ se $-1<\alpha+2<1$ se $-3<\alpha<-1$

ma $]0,2[\cap]-3,-1[= \emptyset \Rightarrow$ la serie NON CONVERGE MAI. $\Rightarrow$ la risposta corretta è la (A)

II parte: esercizi a risposta aperta

1) Trovate tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$(z^2 - 2i)^2 = (z^2 + 4z)^2 .$$

Determinare le soluzioni dell'equazione equivale a determinare le soluzioni di $z^2 - 2i = z^2 + 4z$ (i)

o

$z^2 - 2i = -z^2 - 4z$ (ii)

La (i) equivale a $4z = -2i \Rightarrow z_1 = -i/2$

La seconda equazione, la (ii), equivale a

$$2z^2 + 4z - 2i = 0$$

ovvero

$$z^2 + 2z - i = 0$$

che ha come soluzioni $z_{2,3} = -1 \pm \sqrt{1+i}$

$|1+i| = \sqrt{2}$ $\quad \arg(1+i) = \pi/4 \Rightarrow \sqrt{1+i} = \pm\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{8}\right)$

$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\pi/4}{2}} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ $\quad \operatorname{sen}\frac{\pi}{8} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\pi/4}{2}} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$$z_{2,3} = -1 \pm \sqrt[4]{2}\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} + i\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}\right) = -1 \pm \left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$$

$\Rightarrow z_1 = -i/2$

$$z_2 = -1 + \sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$z_3 = -1 - \sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

2) Sia data la successione $a_n = \sqrt{\frac{1}{n}} - \sqrt{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}$.

a) Calcolate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite della successione $n^\alpha a_n$.

b) Determinate al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ il carattere della serie $\sum_n \frac{a_n}{n^\beta}$.

$$a_n = \left(\sqrt{1/n} - \sqrt{\operatorname{sen} 1/n}\right)\frac{\sqrt{1/n}+\sqrt{\operatorname{sen} 1/n}}{\sqrt{1/n}+\sqrt{\operatorname{sen} 1/n}} = \frac{1/n - \operatorname{sen} 1/n}{\sqrt{1/n}\left(1+\sqrt{\frac{\operatorname{sen} 1/n}{1/n}}\right)}$$

$$= \frac{1/n - \left(1/n - 1/6n^3 + o(1/n^4)\right)}{\sqrt{1/n}\left(2+o(1/n)\right)} = \frac{1}{12}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{5/2}\frac{1+o(1/n)}{1+o(1/n)}$$

$$= \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}\right)^{5/2}\left(1+o(1/n)\right)\left(1+o(1/n)\right) = \frac{1}{12}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{5/2}\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \text{ per } n\to+\infty$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \text{ per } x\to 0 \Rightarrow \operatorname{sen} 1/n = 1/n - 1/6n^3 + o(1/n^4) \text{ per } n\to+\infty$$

$$\frac{\operatorname{sen} 1/n}{1/n} = \frac{1/n + o(1/n^2)}{1/n} = 1 + o(1/n) \text{ per } n\to+\infty$$

$$\sqrt{\frac{\operatorname{sen} 1/n}{1/n}} = \sqrt{1+o(1/n)} = 1+\frac{1}{2}\cdot o(1/n) + o\left(o(1/n)\right) = 1 + o(1/n) \text{ per } n\to+\infty$$

$$\frac{1}{1+o(1/n)} = 1 - o(1/n) = 1 + o(1/n) \text{ per } n\to+\infty$$

$$n^\alpha\cdot a_n = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{5}{2}-\alpha} + o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{5}{2}-\alpha}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \alpha < 5/2 \\ 1/12 & \alpha = 5/2 \\ +\infty & \frac{5}{2} < \alpha \end{cases}$$

$$\frac{a_n}{n^\beta} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{5}{2}+\beta} + o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{5}{2}+\beta}\right) \sim \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{5}{2}+\beta} \text{ per } n\to+\infty$$

$\sum_n \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{5}{2}+\beta}$ converge se $\frac{5}{2}+\beta > 1$ se $\beta > -3/2$

e per il Teorema del confronto asintotico

$\sum_n a_n/n^\beta$ converge se $\beta > -3/2$

3) Calcolate l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 2\sqrt{x} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \int 2\sqrt{x} \cdot \frac{x}{1+x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$= 2\sqrt{x} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + 2 \int \frac{1}{\sqrt{x}\cdot(1+x)} dx =$$

$$= 2\sqrt{x} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + 4 \operatorname{arctg}\sqrt{x} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

in quanto

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} \underset{\substack{y=\sqrt{x} \\ dx=2y\,dy}}{=} \left(\int \frac{2\cancel{y}\,dy}{\cancel{y}(1+y^2)} \right) = \left(2 \operatorname{arctg} y + c \right) = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + c$$

Dunque
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx = \lim_{y \to +\infty} 2\sqrt{y} \ln\left(1+\frac{1}{y}\right) + 4\operatorname{arctg}\sqrt{y}$$

$$- \lim_{y \to 0^+} 2\sqrt{y} \ln\left(1+\frac{1}{y}\right) + 4\operatorname{arctg}\sqrt{y}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} 2\sqrt{y} \cdot \frac{1}{y} + 4 \cdot \frac{\pi}{2} - \lim_{y \to 0^+} 2\sqrt{y}\left(-\ln(y)\right) - 4 \cdot \operatorname{arctg}(0)$$

$$= 2\pi$$

4) Sia data la funzione $f(x) = x^3 - 7x^2 + 8x + 16$.

a) Determinatene segno, gli intervalli di monotonia e quelli di convessità e concavità. Disegnate poi il grafico di f .

b) (**Solo Analisi 1**) Trovate al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e $\lim_{x \to \pm\infty} f = \pm\infty$. Per determinarne il segno si osserva che le possibili radici intere dell'equazione $f(x) = 0$ sono i divisori interi di 16, e cioè

$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16$

$f(-1) = -1-7-8+16 = 0 \underset{\text{(Th Ruffini)}}{\Longrightarrow} (x+1)$ divide $f(x) = x^3-7x^2+8x+16$

$$\begin{array}{l|l} x^3-7x^2+8x+16 & x+1 \\ \underline{x^3+x^2} & \overline{x^2-8x+16} \\ // \; -8x^2+8x+16 & \\ \quad \underline{-8x^2-8x} & \\ \quad // \; 16x+16 & \end{array}$$

ovvero $f(x) = (x+1)(x^2-8x+16)$
$= (x+1)(x-4)^2$

e dunque $f(x) \begin{cases} <0 & x<-1 \\ >0 & -1<x<4 \\ >0 & 4<x \end{cases}$

Inoltre $f'(x) = 3x^2-14x+8 = 0$ se $x_{1,2} = \dfrac{7\pm\sqrt{49-24}}{3} = \begin{cases} 2/3 \\ 4 \end{cases}$

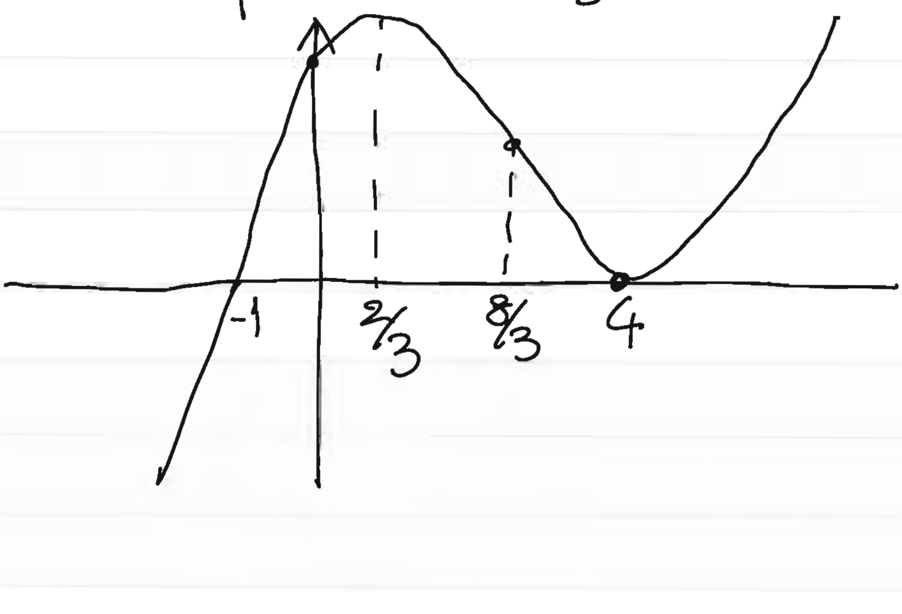
e si ha $f' \begin{cases} >0 & \text{se } x<2/3 \\ <0 & \text{se } 2/3<x<4 \\ >0 & \text{se } 4<x \end{cases} \Longleftrightarrow f \begin{cases} \nearrow & \text{se } x<2/3 \\ \searrow & \text{se } 2/3<x<4 \\ \nearrow & \text{se } 4<x \end{cases}$

segue che $x_1 = 2/3$ $\left(f(x_1) = \frac{8}{27} - 7\frac{4}{9} + 8\cdot\frac{2}{3} + 16 = \frac{500}{27} \right)$

è punto di massimo locale, mentre $x_2 = 4$ $(f(4)=0)$ è punto di minimo locale.

$f'' = 6x-14 \Longrightarrow f$ è concava per $x<7/3$,
convessa per $x>7/3$

e il punto $x = 7/3$ è di flesso (a Tg obliqua)



L'equazione $f(x) = k$:

$k < 0$ o $k > f(2/3)$ $\Longrightarrow$ 1 soluzione
$k = 0$ o $k = f(2/3)$ $\Longrightarrow$ 2 soluzioni
$0 < k < f(2/3)$ $\Longrightarrow$ 3 soluzioni