Analisi Matematica 1 - a.a. 2015-16
CdL in Ingegneria Gestionale
Correzione della prova scritta del 4 luglio 2016

Prima parte : quiz a risposta multipla

(1) In via Garibaldi vengono costruite 10 villette, che devono essere colorate in rosso o verde o blu o giallo. Inoltre il comune impone il vincolo seguente: due villette vicine debbono essere colorate con colori diversi. In quanti modi potranno essere colorate le 10 case?

(A) $(4 \times 3)^5$.
(B) 10^4 .
(C) 4×3^9 .
(D) $2 \times 4 \times 3 \times 2 + 4 \times 3$.

La prima casa la posso colorare come voglio, ovvero ho 4 possibilità

La seconda casa la posso colorare in 3 modi, poiché deve esser diversa dalla prima.

La terza casa la posso colorare in 3 modi, poiché deve esser diversa dalla seconda.

etc

La risposta corretta è dunque $4 \cdot \overbrace{3 \cdot 3 \cdots 3}^{9 \text{ volte}} = 4 \cdot 3^9$

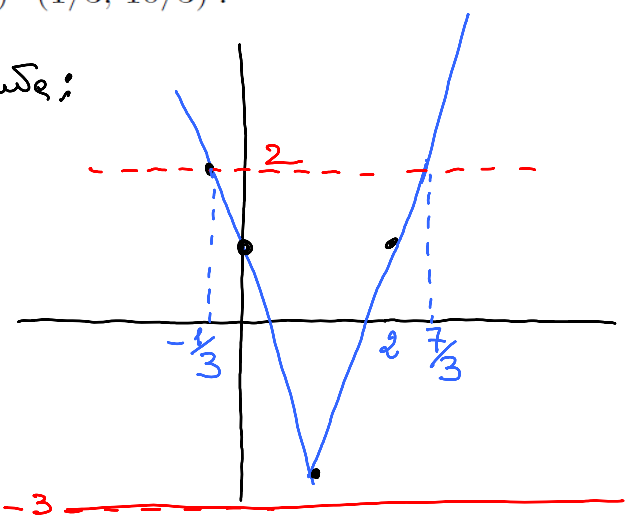
ovvero la (C)

(2) Sia $f(x) = 3|x-1| - 2$. La controimmagine dell'intervallo $[-3, 2)$ è:

(A) $[0, 7/3)$.
(B) $[-2, 4)$.
(C) $(-1/3, 7/3)$.
(D) $(1/3, 10/3)$.

Il grafico della funzione è il seguente:

La risposta corretta è la (C)



(3) Sia $f(x) = x - 2x^3 + x^5$, e sia $P_3(x)$ il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato in $x_0 = 1$. Quale tra le seguenti risposte è **vera**?

(A) $P_3(x) = 4(x-1)^2 + 8(x-1)^3$.

(B) $P_3(x) = x - 2x^3$.

(C) Nessuna delle altre risposte è vera.

(D) $P_3(x) = (x-1) - 2(x-1)^3$.

$$P_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!} f^{(k)}(1) \cdot (x-1)^k \qquad f(1) = 1-2+1 = 0$$

$$f'(x) = 1 - 6x^2 + 5x^4 \qquad f'(1) = 1-6+5 = 0$$

$$f''(x) = -12x + 20x^3 \qquad f''(1) = 8$$

$$f'''(x) = -12 + 60x^2 \qquad f'''(1) = 48$$

quindi $P_3(x) = \frac{8}{2}(x-1)^2 + \frac{48}{6}(x-1)^3 = 4(x-1)^2 + 8(x-1)^3$

quindi la risposta corretta è la (A)

(4) Sia dato l'integrale $I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^{3\alpha} + x^{4\alpha-1}}\,dx$. Posto $A = \{\alpha \ : \ I_\alpha \text{converge}\}$, quale tra le seguenti risposte è vera?

(A) $A = \left]-\infty, \frac{3}{4}\right[$.

(B) $A = \left]\frac{1}{3}, 1\right[$.

(C) Nessuna delle altre risposte è vera.

(D) $A = \left]\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right[$.

I_α converge se $\int_0^1 f(x)\,dx \in \mathbb{R}$ e $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \in \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{3\alpha} + x^{4\alpha-1}}$

$\alpha \geq 1$: se $x \to 0$ $\quad 4\alpha - 1 \geq 3\alpha$ e $f(x) \sim \frac{x}{x^{3\alpha}} = \frac{1}{x^{3\alpha-1}}$

$\int_0^1 f(x)\,dx \in \mathbb{R}$ se $\int_0^1 \frac{dx}{x^{3\alpha-1}} \in \mathbb{R}$ se $3\alpha - 1 < 1$ se $\alpha < 2/3$

IMPOSSIBILE $(\alpha \geq 1)$

$\alpha < 1$: $x \to 0$ $\quad 4\alpha - 1 < 3\alpha$ e $f(x) \sim \frac{x}{x^{4\alpha-1}} = \frac{1}{x^{4\alpha-2}}$

$\int_0^1 f\,dx \in \mathbb{R}$ se $\int_0^1 \frac{dx}{x^{4\alpha-2}} \in \mathbb{R}$ se $4\alpha - 2 < 1$ se $\boxed{\alpha < 3/4}$ (i)

$x \to +\infty$ $\quad 4\alpha - 1 < 3\alpha$ e $f(x) \sim \frac{\pi/2}{x^{3\alpha}}$

$\int_1^{+\infty} f\,dx \in \mathbb{R}$ se $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3\alpha}} \in \mathbb{R}$ se $3\alpha > 1$ se $\boxed{\alpha > 1/3}$ (ii)

(i) + (ii) $\Rightarrow A = \left]1/3, 3/4\right[$ ovvero la risposta corretta è la (D)

(5) Il limite $\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}}-\sqrt[3]{1-\frac{3}{n}}\right)$ vale

(A) $-2/3$.

(B) $+\infty$.

(C) $1/3$.

(D) 1 .

Quando $y \to 0$ $f(y)=(1+y)^\alpha = 1+\alpha y + o(y)$

da cui segue

$$n\left(\left(1-\frac{2}{n}\right)^{1/3}-\left(1-\frac{3}{n}\right)^{1/3}\right) = n\left[\cancel{1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{n}-\cancel{1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= n\left[\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{1}{3}+o(1) \quad \text{per } n\to+\infty$$

e dunque la risposta corretta è la (C)

(6) Posto $\bar{z}=1-\mathrm{i}^3$, sia $w=\frac{|z|^2\bar{z}^2-\mathrm{i}z}{(2z-3)^2}$. Quale tra le seguenti risposte è vera?

(A) $\Im w = -\frac{\mathrm{i}}{5}$.

(B) $\Re w = \frac{9}{25}$.

(C) Nessuna delle altre risposte è vera.

(D) $\Re w > \Im w$.

$\bar{z} = 1-i^3 = 1-(-i) = 1+i \qquad z = \overline{(\bar{z})} = 1-i \qquad |z|^2 = 1^2+1^2 = 2$

e quindi

$$\omega = \frac{2(1+i)^2 - i(1-i)}{(2(1-i)-3)^2} = \frac{2(1-1+2i)-i-1}{(-1-2i)^2} = \frac{-1+3i}{1-4+4i}\cdot\frac{-3-4i}{-3-4i}$$

$$= \frac{3+4i-9i+12}{25} = \frac{15}{25}-\frac{5}{25}i = \frac{3}{5}-\frac{i}{5}$$

e la risposta corretta è la (D)

(7) Sia $f(x) = \begin{cases} a\log x + b\,\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-1} & \text{se } x \geq 1 \\ a\cos(\pi x) + b\,x^2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$ con $a,b\in\mathbb{R}$. Allora f è derivabile su tutto $\mathbb{R}$

(A) se $a=\frac{2+\mathrm{e}^{-1}}{2+\mathrm{e}}$ e $b=(2+\mathrm{e})^{-1}$.

(B) se $b=\frac{\mathrm{e}}{1+2\,\mathrm{e}}a$ per ogni $a\in\mathbb{R}$.

(C) se $a=-\frac{2+\mathrm{e}^{-1}}{3\,\mathrm{e}}$ e $b=-(3\,\mathrm{e})^{-1}$.

(D) se $b=\frac{a\,\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}-1}$ per ogni $a\in\mathbb{R}$.

La funzione è derivabile (e quindi continua) $\forall a,b$ quando $x\neq 1$

In $x=1$ f è continua se $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -a+b = \frac{b}{e}-\frac{1}{e} = \lim_{x\to 1^+} f(x)$

e quindi

$$a = b - \frac{b}{e} + \frac{1}{e}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{a}{x} - b e^{-x} & \text{se } x > 1 \\ -\pi a \operatorname{sen}(\pi x) + 2bx & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

f è derivabile in $x = 1$

se $\lim_{x \to 1^-} f'(x) = 2b = a - b/e = \lim_{x \to 1^+} f'(x) \Rightarrow a = b\left(2 + 1/e\right)$

Risolvendo

$$\begin{cases} a = b\left(1 - \frac{1}{e}\right) + 1/e \\ a = b\left(2 + 1/e\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{"} \\ b\left(2 + 1/e\right) = b\left(1 - 1/e\right) + 1/e \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{"} \\ b\left(1 + 2/e\right) = 1/e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2e+1}{e} \cdot \frac{1}{2+e} = \frac{2 + e^{-1}}{2+e} \\ b = \frac{1}{2+e} \end{cases}$$

e la risposta corretta è la (A)

Seconda parte: esercizi a risposta aperta

1) Determinate le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(\frac{\bar{z}}{\mathrm{i}z-1}+\frac{1}{z+\mathrm{i}}\right)^3=-8\mathrm{i}\,.$$

Questa equazione conviene scriverla come:

$$\begin{cases} \omega^3=-8i \\ \dfrac{\bar z}{iz-1}+\dfrac{i}{iz-1}=\omega \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega^3=-8i \\ \dfrac{\bar z+i}{iz-1}=\omega \end{cases}$$

con $z\neq i$

$$\omega^3=-8i=2^3\left(\cos\left(\tfrac{3}{2}\pi\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{3}{2}\pi\right)\right)$$

$$\omega_0=2\cdot\left(\cos\tfrac{\pi}{2}+i\,\mathrm{sen}\,\tfrac{\pi}{2}\right)=2i$$

$$\omega_1=2\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{2}{3}\pi\right)+i\,\mathrm{sen}(\ldots)\right)=-\sqrt3-i$$

$$\omega_2=2\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{4}{3}\pi\right)+i\,\mathrm{sen}(\ldots)\right)=\sqrt3-i$$

$$\frac{\bar z+i}{iz-1}=2i \iff \bar z+i=-2z-2i \iff a-ib+2a+2ib+3i=0$$

$$\iff \begin{cases} a=0 \\ b+3=0 \end{cases} \iff \boxed{z_0=-3i}$$

$$\bar z+i=-(\sqrt3+i)(iz-1) \iff \bar z+\cancel{i}+i\sqrt3 z-\sqrt3-z-\cancel{i}=0 \iff -2ib+i\sqrt3a-\sqrt3b-\sqrt3=0$$

$$\iff \begin{cases} -\sqrt3 b-\sqrt3=0 \\ \sqrt3 a=2b \end{cases} \iff \begin{matrix} b=-1 \\ a=-2/\sqrt3 \end{matrix} \iff \boxed{z_1=-2/\sqrt3-i}$$

$$\bar z+i=(\sqrt3-i)(iz-1) \iff \bar z+\cancel{i}=i\sqrt3 z-\sqrt3+z+\cancel{i} \iff \cancel{a}-ib=i\sqrt3a-\sqrt3b-\sqrt3+\cancel{a}+ib$$

$$\iff \begin{cases} -b=\sqrt3a+b \\ -\sqrt3b-\sqrt3=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt3a=2 \\ b=-1 \end{cases} \iff \boxed{z_2=\frac{2}{\sqrt3}-i}$$

2) Sia data
$$f(x) = 2\frac{x}{e^x - e^{-x}}.$$

a) Determinare per quale valore di $\alpha > 0$ l'infinitesimo $f(x) - \cos(\alpha x)$ ha ordine massimo; determinare la parte parte principale dell'infinitesimo di ordine massimo.

b) Calcolare, al variare di $\alpha > 0$, il limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - \cos(\alpha x)}{x^3 + x^\alpha}.$$

$$f(x) = \frac{2x}{\cancel{1} + x + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{6} + \cancel{\frac{x^4}{24}} + \frac{x^5}{120} - \cancel{1} + x - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{6} - \cancel{\frac{x^4}{24}} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)} = \frac{2x}{2x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{60} + o(x^5)}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)} = 1 - \left[\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right] + \left[\frac{x^2}{6}\right]^2 + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{7}{360}x^4 + o(x^4)$$

$$f(x) - \cos(\alpha x) = \cancel{1} - \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + o(x^4) - \cancel{1} + \frac{\alpha^2 x^2}{2} - \frac{\alpha^4 x^4}{24}$$

$$= x^2\left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{6}\right) + x^4\left(\frac{7}{360} - \frac{\alpha^4}{24}\right) + o(x^4)$$

$\frac{\alpha^2}{2} = \frac{1}{6} \iff \alpha^* = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\alpha > 0$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 45 \\ 16 \\ \hline 270 \\ 45 \\ 72 \end{array}$$

Quando $\alpha \neq \frac{1}{\sqrt{3}}$ $f(x)$ ha ordine 2, mentre quando $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $f(x)$ ha ordine 4 e la sua parte principale è $\frac{11}{720}x^4$

$$\frac{f(x) - \cos\alpha x}{x^3 + x^\alpha} = \frac{\left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{6}\right)x^2 + \left(\frac{7}{360} - \frac{\alpha^4}{24}\right)x^4 + o(x^4)}{x^3 + x^\alpha} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \begin{cases} 0 & \alpha < 2 \\ \frac{11}{6} & \alpha = 2 \\ +\infty & 2 < \alpha \end{cases}$$

infatti per $\alpha < 2$ allora $\frac{f(x) - \cos\alpha x}{x^3 + x^\alpha} \sim \frac{\left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{6}\right)x^2}{x^\alpha} = \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{6}\right)x^{2-\alpha} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$

etc

3) Calcolate la primitiva F della funzione

$$f(x) = \frac{e^{3x} - 2e^{2x}}{e^{2x} + 2e^x + 8}$$

tale che $F(0) = 0$

$$\int f(x)\,dx \underset{\substack{t=e^x \\ x=\ln(t) \\ dx=\frac{dt}{t}}}{=} \left(\int \frac{t^3-2t^2}{t^2+2t+8}\cdot\frac{dt}{t}\right)_{t=e^x} = \left(\int \frac{t^2-2t}{t^2+2t+8}\,dt\right)_{t=e^x}$$

$$=\left(\int \frac{t^2+2t+8}{t^2+2t+8}\,dt - \int \frac{4t+8}{t^2+2t+8}\,dt\right)_{t=e^x}$$

$$=\left(t - 2\int \frac{2t+2}{t^2+2t+8}\,dt - 4\int \frac{dt}{(t+1)^2+7}\right)_{t=e^x}$$

$$=\left(t - 2\ln(t^2+2t+8) - \frac{4}{\sqrt7}\int \frac{1/\sqrt7}{1+\left(\frac{t+1}{\sqrt7}\right)^2}\,dt\right)_{t=e^x}$$

$$=\left(t-2\ln(t^2+2t+8) - \frac{4}{\sqrt7}\operatorname{arctg}\left(\frac{t+1}{\sqrt7}\right)+c\right)_{t=e^x}$$

$$=e^x-2\ln(e^{2x}+2e^x+8)-\frac{4}{\sqrt7}\operatorname{arctg}\left(\frac{e^x+1}{\sqrt7}\right)+c \qquad c\in\mathbb{R}$$

$$F(0) = 1-2\ln(11)-\frac{4}{\sqrt7}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt7}\right)+c = 0$$

$$\Rightarrow c = -1+2\ln(11)+\frac{4}{\sqrt7}\operatorname{arctg}(2/\sqrt7)$$

4) Sia data la funzione $f(x) = (x^2-4)e^{-|x|}$.

a) Studiate la funzione f, trovandone in particolare: limiti agli estremi del campo di esistenza, segno, intervalli di monotonia, massimi e minimi locali/globali e intervalli di convessità e concavità. Determinate derivata destra e sinistra nei punti di non derivabilità. Disegnate il grafico di f.

b) Trovate al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni reali dell'equazione

$$f(x) = \frac{4}{e^2}x + k\,.$$

$f(x)$ è una funzione pari definita $\forall x\in\mathbb{R}$

$f(0) = -4 \qquad f(2)=f(-2)=0$

$f(x)>0$ se $x^2-4>0$ se $|x|>2$ $\quad \frac{\infty}{\infty}$: applico l'Hospital 2 volte

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4}{e^x} = \dots = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^x} = 0^+$$

quando $\boxed{x>0}$ $f=(x^2-4)e^{-x}$ $f'=2xe^{-x}-(x^2-4)e^{-x}=-(x^2-2x-4)e^{-x}$

$f'=0 \iff x=1+\sqrt{5}$

dunque

$$f'(x)=\begin{cases} >0 & x<-1-\sqrt{5} \\ <0 & -1-\sqrt{5}<x<0 \\ >0 & 0<x<1+\sqrt{5} \\ <0 & 1+\sqrt{5}<x \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $x=1+\sqrt{5}$ e $x=-1-\sqrt{5}$ sono due punti di massimo per $f(\mathbb{R})$

$f(1+\sqrt{5})=\max f(\mathbb{R})$
$=f(-1-\sqrt{5})$

$x=0$ è punto in cui $f(x)$ non è derivabile e si ha

$f'_-(0)=-4 \qquad 4=f'_+(0)$

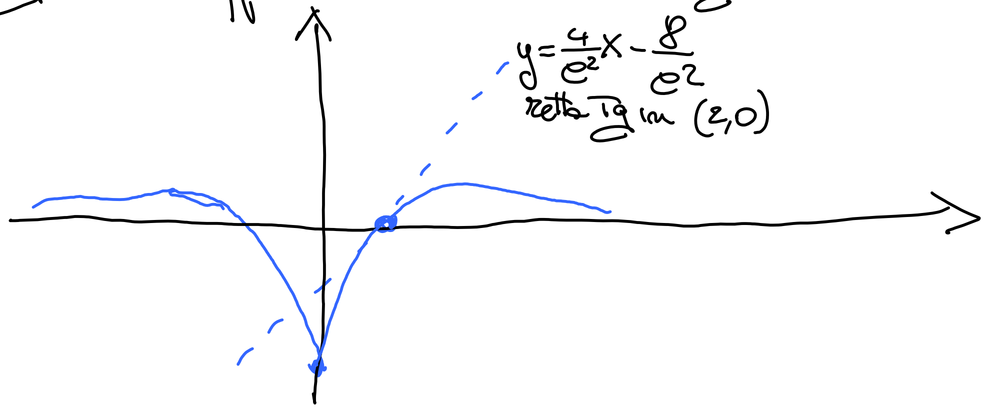
$f(0)=\min f(\mathbb{R})=4$

$x>0$ $f'=-(x^2-2x-4)e^{-x}$ $\qquad f''=-(2x-2)e^{-x}+(x^2-2x-4)e^{-x}$

$f''=(x^2-4x-2)e^{-x}=0$ se $\begin{cases} x^2-4x-2=0 \\ x>0 \end{cases}$ se $x=2+\sqrt{6}$

dunque $f''(x)\begin{cases} >0 & \text{se } x<-2-\sqrt{6} \\ <0 & \text{se } -2-\sqrt{6}<x<0 \\ <0 & \text{se } 0<x<2+\sqrt{6} \\ >0 & \text{se } 2+\sqrt{6}<x \end{cases}$

Un grafico approssimativo è il seguente



$f'(x)=\frac{4}{e^2} \iff \begin{cases} -(x^2-2x-4)\cdot e^{-x}=4/e^2 \\ x>0 \end{cases}$ o $\begin{cases} (x^2+2x-4)e^{x}=4/e^2 \\ x<0 \end{cases}$

gli unici valori possibili sono $x=2$ o $x=-2$

$x=-2 \quad f' = (4-4-4)\cdot e^{-2} = -\frac{4}{e^2} \neq \frac{4}{e^2}$

$x=2 \quad f' = -(4-4-4)\cdot e^{-2} = \frac{4}{e^2} = \frac{4}{e^2}$

Dunque, essendo $f(2)=0$, si ha che

$y = \frac{4}{e^2}(x-2) = \frac{4}{e^2} - \frac{8}{e^2}$ retta tg. in $(2, f(2))$

$y = \frac{4}{e^2}x - 4$ retta parallela retta tg in $(2, f(2))$ passante per $(0,-4)$

$k < -\frac{8}{e^2} \Rightarrow f(x) = \frac{4}{e^2}x + k$ ha 1 soluzione

$k = -\frac{8}{e^2} \Rightarrow$ " ha 2 soluzioni

$-\frac{8}{e^2} < k < -4 \Rightarrow$ " ha 3 soluzioni

$k = -4 \Rightarrow$ " ha 2 soluzioni

$-4 < k \Rightarrow$ " " 1 soluzione