Analisi Matematica 1 - a.a. 2015-16

Prova scritta del 14 giugno 2016

Correzione della prova scritta

Prima parte: quiz a risposta multipla

(1) A uno studente sono stati assegnati 7 problemi ma, siccome ha studiato un po' poco, per ciascun problema la probabilità che dia la risposta esatta è del 50%. Qual è la probabilità che ne risolva **almeno** 4 su 7?

(A) 3/4 .
(B) 39/128 .
(C) 1/2 .
(D) 4/7 .

Soluzione veloce:

Probabilità di risolverne almeno 4 su 7 $\equiv P_1$

Probabilità " di risolvere al più 3 su 7 $\equiv P_2$

ed inoltre $P_1 + P_2 = 1 \Rightarrow P_1 = 1/2$ e quindi la risposta corretta è la (C)

Soluzione alternativa:

$P \equiv P_7 + P_6 + P_5 + P_4$

$$\equiv \left(\tfrac{1}{2}\right)^7 \cdot \binom{7}{7} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^7 \binom{7}{6} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^7 \binom{7}{5} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^7 \cdot \binom{7}{4} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^7 \cdot (1+7+21+35) = \tfrac{1}{2}$$

(2) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x$. Allora:

(A) f è convessa su tutto $\mathbb{R}$.
(B) $x_0 = 1$ è un punto di minimo locale.
(C) $\min f = -2$.
(D) f è crescente in $]-2, +\infty[$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^4 \left(1 - 6/x^2 + 8/x^3\right) = +\infty$$

e dunque esiste un punto di minimo assoluto, per il Teorema di Weierstrass.

$$f' = 4x^3 - 12x + 8$$
$$= 4x^3 - 4x - 8x + 8$$
$$= 4x(x^2-1) - 8(x-1) = (x-1)\left[4x(x+1) - 8\right] = (x-1)\cdot(x-1)(x+2)$$

$f'(1) = 0 \Rightarrow (x-1)$ divide f'

$$4x^2+4x-8=0 \iff x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} \begin{matrix} \nearrow -2 \\ \searrow 1 \end{matrix}$$

$f''(x) = 12x^2-12 = 12(x-1)(x+1)$ e dunque f NON è convessa su $]-1,1[$

$x_0=1$ non è punto di minimo locale in quanto $f'(1)=f''(1)$ mentre $f'''(x)=24x$ e $f'''(1)=24>0$ ovvero f è crescente in un intorno di $x_0=1$

$x_0=-2$ è punto di minimo assoluto (ed è pure locale) e si ha $f(-2)=(-2)^4-6(-2)^2+8\cdot(-2)$
$= 16-24-16=-24 \neq -2$

La risposta corretta è la (D), in quanto $x_0=-2$ è l'unico punto in cui cambia segno la $f'(x)$, e si ha

$$f'(x)=\begin{cases} <0 & x<-2 \\ >0 & x>-2,\ x\neq 1 \end{cases}$$

(3) Il valore di $\int_{-7}^{7} |x^2-1|\,dx$ è

(A) $322/3$.	(C) 0 .
(B) $644/3$.	(D) $652/3$.

$$\int_{-7}^{7}|x^2-1|\,dx = \int_{-7}^{-1}(x^2-1)\,dx + \int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx + \int_{1}^{7}(x^2-1)\,dx$$

$$= \int_{-7}^{-1}x^2\,dx - \int_{-1}^{1}x^2\,dx + \int_{1}^{7}x^2\,dx \; -6+2-6$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-7}^{-1} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_{1}^{7} -10$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ 7 \\ \hline 343 \end{array}$$

$$= -\frac{1}{3}+\frac{7^3}{3}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\frac{7^3}{3}-\frac{1}{3}-\frac{30}{3}$$

$$= 2\cdot\frac{343}{3}-\frac{4}{3}-\frac{30}{3} = \frac{686-34}{3} = \frac{652}{3}$$

e dunque la risposta corretta è la (D)

(4) La successione $n \cdot \text{sen}(5/n) \cdot \sqrt[n]{2^n + 3\cos n}$ ha limite

(A) 5.

(B) 15.

(C) $+\infty$.

(D) 10.

$$\lim_{n\to+\infty} n \cdot \text{sen}\frac{5}{n} \cdot \sqrt[n]{2^n + 3\cos(n)} = \lim_{n\to+\infty} 5 \cdot \frac{\text{sen}\,5/n}{5/n} \cdot 2 \cdot \sqrt[n]{1+\frac{3\cos(n)}{2^n}}$$

$$= 10 \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{\text{sen}\,5/n}{5/n} \cdot \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1+\frac{3\cos(n)}{2^n}} = 10 \cdot 1 \cdot 1$$

e dunque la risposta corretta è la (D)

(5) I valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui converge l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^{\alpha} \cdot x^{-3\alpha}\, dx$ sono

(A) $1/3 < \alpha < 1/2$.

(B) $\alpha > 1/3$.

(C) $\alpha > 1/2$.

(D) $\alpha < 1/3$.

L'integrale converge se convergono $\int_0^1 f(x)\,dx$ e $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$

$\int_0^1 f(x)\,dx$: $f(x) = \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^{\alpha} \cdot \frac{1}{x^{3\alpha}} \sim \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha} \cdot \frac{1}{x^{3\alpha}} = \frac{1}{2^{\alpha}} \cdot \frac{1}{x^{2\alpha}} \quad x \to 0$

e $\int_0^1 x^{-2\alpha}\,dx \in \mathbb{R}$ se $2\alpha < 1$ se $\alpha < \frac{1}{2}$

dunque $\int_0^1 f(x)\,dx \in \mathbb{R}$ se $\alpha < \frac{1}{2}$

$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ $\quad f(x) = \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^{\alpha} \cdot \frac{1}{x^{3\alpha}} \sim \frac{1}{x^{3\alpha}} \quad x \to +\infty$

e $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3\alpha}} \in \mathbb{R}$ se $3\alpha > 1$ se $\alpha > \frac{1}{3}$

dunque $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \in \mathbb{R}$ se $\alpha > \frac{1}{3}$

Infine $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \in \mathbb{R}$ se $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$, ovvero la risposta corretta è la (A)

(6) La funzione $\operatorname{sen} x^2 - x^2 + x^6/10$

(A) ha minimo su $\mathbb{R}$, ma non massimo.

(B) ha massimo su $\mathbb{R}$, ma non minimo.

(C) ha su $\mathbb{R}$ sia minimo che massimo.

(D) non ha su $\mathbb{R}$ né minimo né massimo.

Si ha che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^6\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{x^4} + \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^6}\right) = +\infty$

e dunque $\nexists$ massimo mentre esiste $\min f(\mathbb{R})$

e dunque la risposta corretta è la (A).

(7) Se $\Re z < \Im z$, $\Im \bar{z} < \Im z$, $\Re z < -2/3$ e $|z| > 3$, allora z in che quadrante del piano complesso si trova?

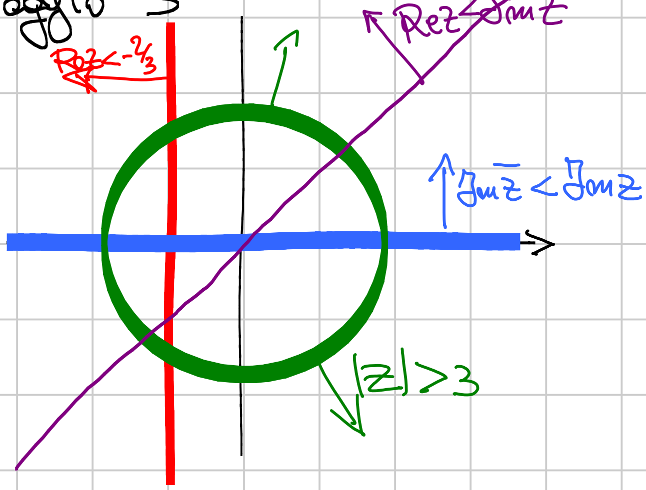
(A) Nel terzo quadrante.

(B) Nel quarto quadrante.

(C) Nel primo quadrante.

(D) Nel secondo quadrante.

Nel piano complesso $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$ è la bisettrice del 1° e del 3° quadrante
$\operatorname{Im} \bar{z} = \operatorname{Im} z$ è l'asse reale; $\operatorname{Re} z = -2/3$ è la retta // asse immaginario passante per $(-2/3, 0)$; $|z| = 3$ è la circonferenza centro $(0,0)$ e raggio 3



La risposta corretta è la (D), ovvero $z \in$ secondo quadrante

Seconda parte: esercizi a risposta aperta

1) Determinate le soluzioni (z, w), con $z, w \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} z^2 - z\sqrt{3} + i\bar{w} = 0 \\ (w + \bar{z} - \sqrt{3})(w + iz\sqrt{3}) = 0 \,. \end{cases}$$

Il sistema equivale a

$$\begin{cases} z^2 - z\sqrt{3} + i\overline{w} = 0 \\ w + \bar{z} - \sqrt{3} = 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} z^2 - z\sqrt{3} + i\overline{w} = 0 \\ w = -iz\sqrt{3} \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \overline{w} = -z + \sqrt{3} \\ z^2 - z\sqrt{3} - iz + i\sqrt{3} = 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} z^2 - z\sqrt{3} - \bar{z}\sqrt{3} = 0 \\ \overline{w} = i\bar{z}\sqrt{3} \end{cases}$$

ovvero

$$z_{1,2} = \frac{\sqrt{3} + i + \sqrt{2 + 2i\sqrt{3} - 4i\sqrt{3}}}{2} \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}+i+\sqrt{3}-i}{2} = \sqrt{3} = z_1 \\[2ex] \dfrac{\sqrt{3}+i-\sqrt{3}+i}{2} = i = z_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (z_1, w_1) = (\sqrt{3}, 0) \qquad (z_2, w_2) = (i, \sqrt{3}+i)$$

Resta da risolvere

$$\begin{cases} z^2 - \sqrt{3}(z + \bar{z}) = 0 \\ w = -iz\sqrt{3} \end{cases} \quad \text{e posto } z = a + ib \quad \begin{cases} a^2 - b^2 + 2iab - 2a\sqrt{3} = 0 \\ w = -iz\sqrt{3} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ w = 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} b = 0 \\ a = 2\sqrt{3} \\ w = -6i \end{cases} \iff (z_3, w_3) = (0,0) \qquad (z_4, w_4) = (2\sqrt{3}, -6i)$$

2) Determinate per quali valori di $a, b, c \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \log(e^{2x} - \operatorname{sen} x) + ax + bx^2 + cx^3$$

è un infinitesimo di ordine 4 per $x \to 0$.

(Solo Analisi 1) Per tali valori di $a, b, c \in \mathbb{R}$, calcolate $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^4}$.

Per $x \to 0$ $\quad e^{2x} - \operatorname{sen} x = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 - x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$

$$= 1 + x + 2x^2 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

Inoltre $\quad \ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + o(y^4) \quad y \to 0$, da cui

$$\log\left(1+\left(x+2x^2+\frac{3}{2}x^3+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)\right)\right)=\left[x+2x^2+\frac{3}{2}x^3+\frac{2}{3}x^4\right]-\frac{1}{2}\left[x+2x^2+\frac{3}{2}x^3\right]^2$$

6

$$+\frac{1}{3}\left[x+2x^2\right]^3-\frac{x^4}{4}+o(x^4)=$$

$4x^4+3x^4$

$$=x+2x^2+\frac{3}{2}x^3+\frac{2}{3}x^4-\frac{1}{2}x^2-2x^4-2x^3-\frac{3}{2}x^4+\frac{x^3}{3}+2x^4-\frac{x^4}{4}+o(x^4)$$

$$=x+\frac{3}{2}x^2-\frac{x^3}{6}-\frac{13}{12}x^4+o(x^4)$$

Dunque $f(x)=(a+1)x+\left(b+\frac{3}{2}\right)x^2+\left(c-\frac{1}{6}\right)x^3-\frac{13}{12}x^4+o(x^4)\quad x\to 0$

e dunque $f(x)=-\frac{13}{12}x^4+o(x^4)$ ~~se~~ $a=-1,\ b=-\frac{3}{2},\ c=\frac{1}{6}$

e, in corrispondenza a questi valori

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^4}=-\frac{13}{12}$$

3) Calcolate l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_4^{+\infty} x^2 e^{-x}\,dx$.

(**Solo Analisi 1**) Posto poi $a_n=\displaystyle\int_{\log n}^{+\infty} x^2 e^{-x}\,dx$, calcolate al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha a_n\ .$$

$$\int x^2e^{-x}dx \overset{\text{Per parti}}{=} -e^{-x}\cdot x^2-\int(-e^{-x})\cdot 2x\,dx \overset{\text{Per parti}}{=} -x^2e^{-x}+2\left[(-e^{-x})\cdot x-\int(-e^{-x})\right]$$

$$=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+c \qquad c\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \int_4^{+\infty} x^2e^{-x}dx=\lim_{b\to+\infty}\left[-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}\right]_{x=4}^{x=b}$$

$$=\frac{16}{e^4}+\frac{8}{e^4}+\frac{2}{e^4}=\frac{26}{e^4}$$

Si osservi che $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}=0$ per $\alpha=2,1,0$

$$a_n = \int_{\ln(n)}^{+\infty} x^2 e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}\right]_{x=\ln(n)}^{x=b}$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\left(\ln^2(n)+2\ln(n)-2\right)$$

e si ha $\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha} a_n = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln^2(n)+2\ln(n)-2}{n^{1-\alpha}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha\geq 1 \\ 0 & \text{se } \alpha<1 \end{cases}$

4) Sia data la funzione $f(x) = e^{-x^2}(x^2+2)$.

a) Studiate la funzione f , trovandone in particolare gli intervalli di monotonia e quelli di convessità e concavità. Disegnate il grafico di f .

b) Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ il punto di massimo della funzione derivata f' . Scrivete l'equazione della retta tangente al grafico di f in corrispondenza del punto di ascissa x_0 .

c) **(Solo Analisi 1)** Motivando la risposta, trovate al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione

$$f(x) = \frac{4}{e}x + k\ .$$

Il dominio di f è tutto $\mathbb{R}$

$f(x) > 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$f(x) = f(-x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$, ovvero la funzione è pari

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \underbrace{\frac{x^2+2}{e^{x^2}}}_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \overset{\text{Hospital}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\underset{\text{Hospital}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}} = 0^+$$

Possiamo dire che $\exists \max f(\mathbb{R})$

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}(x^2+2) + 2xe^{-x^2} = -e^{-x^2}\cdot 2x(x^2+1)$$

$f' = 0$ se $x=0$

$f' \begin{cases} >0 & x<0 \\ <0 & x>0 \end{cases} \Rightarrow x=0$ p.to di massimo per $f(\mathbb{R})$

$$f''(x) = +4x^2e^{-x^2}(x^2+1) - 2e^{-x^2}(x^2+1) - 4x^2e^{-x^2}$$
$$= e^{-x^2}\left(4x^4 + \cancel{4x^2} - 2x^2 - 2 - \cancel{4x^2}\right)$$
$$= 2e^{-x^2}\left(2x^4 - x^2 - 1\right)$$
$$= 2e^{-x^2}\left[2x^4 - 2x^2 + x^2 - 1\right]$$
$$= 2e^{-x^2}\left[2x^2(x^2-1) + (x^2-1)\right]$$
$$= 2e^{-x^2}(x^2-1)(2x^2+1) = 0 \quad \text{se} \quad x_1 = 1 \text{ o } x_2 = -1$$

$2t^2 - t - 1 = 0$

$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$

$x_{1,2} = \pm 1$

$$f'' \begin{cases} > 0 & x < -1 \\ < 0 & -1 < x < 1 \\ > 0 & 1 < x \end{cases}$$

ovvero $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$ sono punti di flesso
e $f(x)$ è concava in $(-1,1)$
" " convessa in $\mathbb{R} \setminus (-1,1)$

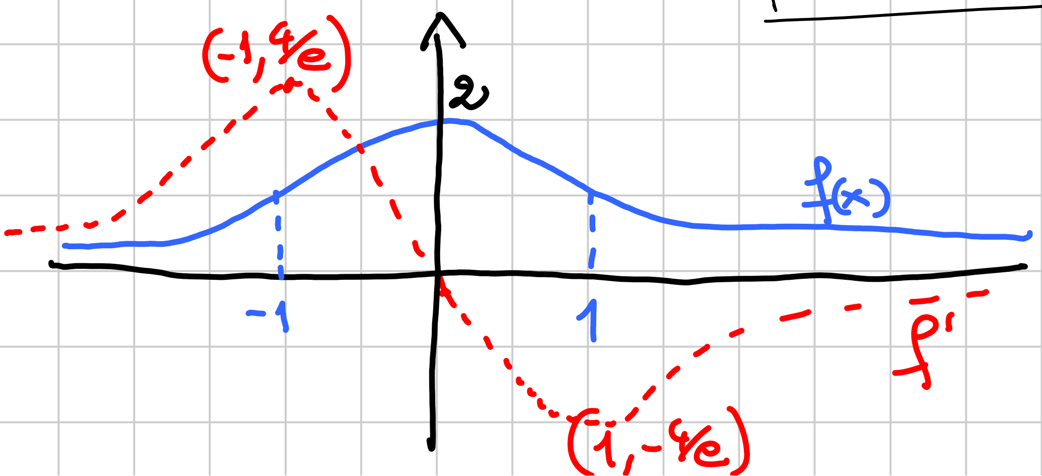
Essendo f pari, si ha che f' è dispari e

$$f'(-1) = -2(-1)\cdot e^{-1}\cdot((-1)^2+1) = \frac{4}{e} = \max f'(\mathbb{R})$$

$$f(-1) = e^{-(-1)^2}((-1)^2+2) = 3/e$$

La retta Tg in $(-1, 3/e)$ ha equazione

$$y = 3/e + \frac{4}{e}(x+1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \frac{4}{e}x + \frac{7}{e}}$$



Dobbiamo cercare le soluzioni di

$$f(x) = \frac{x^2+2}{e^{x^2}} = \frac{4}{e}x + k \quad \text{al variare di } k \in \mathbb{R}$$

Si osserva che $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+2}{e^{x^2}} - \frac{4}{e}x\right) = +\infty$

mentre $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

Inoltre $g'(x) = -2x\,e^{-x^2}(x^2+1) - \frac{4}{e} < 0 \quad \forall x \neq -1$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 0 \quad x = -1$

ovvero $g(x)$ è strettamente decrescente e $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$: ne segue che $g(x) = k$ ha 1 ed 1 sola soluzione $\forall k \in \mathbb{R}$.