Analisi Matematica 1
Prova scritta del 28 gennaio 2016
Correzione
I^a Parte: Quiz a risposta multipla

(1) La successione $n\log\left(\dfrac{\sqrt[n]{n}}{n}+\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ tende a

(A) 1.
(B) 0.
(C) $1/2$.
(D) -1.

La risposta corretta è la (C) in quanto

$\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \Rightarrow \sqrt[n]{n} = 1+o(1)$ per $n\to+\infty$

$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$ per $x\to 0 \Rightarrow \cos\frac{1}{\sqrt{n}} = 1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ per $n\to+\infty$

$\log(1+x) = x+o(x)$ per $x\to 0$

$$\Rightarrow n\log\left(\frac{\sqrt[n]{n}}{n}+\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \log\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)+\frac{1}{n}+o(1)\cdot\frac{1}{n}\right)\cdot n$$
$$= \log\left(1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\cdot n$$
$$= \left(\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\cdot n = \frac{1}{2}+o(1) \quad \text{per } n\to+\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} n\log\left(\frac{\sqrt[n]{n}}{n}+\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2}$$

(2) I valori di $\alpha\in\mathbb{R}$ per i quali converge $\sum_n\left[|3\alpha-2|^n+\dfrac{n^{\alpha-2}}{1+n^{3+5\alpha}}\right]$ sono:

(A) $\alpha<1/2$ o $\alpha>2/3$.
(B) $\alpha<1$.
(C) $1/3<\alpha<1$.
(D) $\alpha>-1$.

La risposta corretta è la (C), infatti:

Il termine generale $a_n = |3\alpha-2|^n+\dfrac{n^{\alpha-2}}{1+n^{3+5\alpha}} = b_n+c_n$

dove $b_n, c_n\geq 0$: ne segue che

$\sum_n a_n$ converge se $\sum_n b_n$ e $\sum_n c_n$ convergono

Studiamo $\sum_n b_n$: è una serie geometrica che converge se $-1<3\alpha-2<1$ se $1<3\alpha<3$

se $\frac{1}{3}<\alpha<1$

Studiamo $\sum_n c_n$: si ha che $c_n \sim \dfrac{n^{\alpha-2}}{n^{3+5\alpha}} = \dfrac{1}{n^{5+4\alpha}}$ $n\to+\infty$

e quindi converge se $5+4\alpha>1$ se $\alpha>-1$

Dunque $\sum_n a_n$ converge se $\frac{1}{3}<\alpha<1$

(3) L'integrale $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{|x^2-9|}{x-3}\,dx$

(A) diverge.

(B) vale -1.

(C) vale $-3/2$.

(D) vale $3/2$.

La risposta corretta è la (C): infatti
Quando $x \in [-2,-1]$ si ha $x^2-9<0$, e quindi
$|x^2-9| = 9-x^2$ e quindi

$$\int_{-2}^{-1} \frac{|x^2-9|}{x-3}\,dx = \int_{-2}^{-1} -\frac{x^2-9}{x-3}\,dx = \int_{-2}^{-1} -(x+3)\,dx = \left[-\frac{x^2}{2}-3x\right]_{x=-2}^{x=-1}$$

$$= -\frac{1}{2} - 3(-1) - \left(-\frac{4}{2} - 3(-2)\right) = -\frac{1}{2} + 3 + 2 - 6 = -3/2$$

(4) I valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per cui $f(x) = \begin{cases} 2x - a(x^2-x) & \text{se } x \le 0 \\ a - 2b(x^2+3x+1) & \text{se } x > 0 \end{cases}$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ sono

(A) $a=-2$, $b=-1$.

(B) $a=1$, $b=-1$.

(C) $a=-1/2$, $b=-1/4$.

(D) $a=b=0$.

La risposta corretta è la (C)
La funzione è derivabile su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ comunque si prendano i parametri a e b

Continuità in $x=0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left[2x - a(x^2-x)\right] = \underbrace{\boxed{0 = a-2b}}_{(i)} = \lim_{x\to 0^+} \left[a-2b(x^2+3x+1)\right] = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

Derivabilità in $x=0$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \left[2 - a(2x-1)\right] = \underbrace{\boxed{2+a = -6b}}_{(ii)} = \lim_{x\to 0^+} -2b(2x+3) = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$$

$$\begin{cases} (i) \\ (ii) \end{cases} \iff \begin{cases} a-2b=0 \\ 2+a=-6b \end{cases} \iff \begin{cases} a=2b \\ 2+2b=-6b \end{cases} \iff \begin{cases} a=2b \\ \cancel{2}^{1} = -\cancel{8}^{4} b \end{cases} \quad \begin{cases} a=-1/2 \\ b=-1/4 \end{cases}$$

(5) Sia $w = \dfrac{3z - \mathrm{i}|z|^2 - (2+\mathrm{i})\overline{z}}{2\Re z - \Im z}$. Se $z = 2+\mathrm{i}$, quale tra le seguenti risposte è vera?

(A) $\Re w = -1/3$.

(B) $\Im w = 8/3$.

(C) Nessuna delle altre risposte è vera.

(D) $\Im w = -2/3$.

La risposta corretta è la (D) infatti
si ha $w = \dfrac{3(2+i) - i(2^2+1^2) - (2+i)(2-i)}{2\cdot 2 - 1} =$

$$= \frac{6+3i-5i-5}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}i$$

(6) Le soluzioni di $\left|x+2|1-x|\right|<2$ sono

(A) $-2<x<2$.
(B) $0<x<4/3$.
(C) $x>0$.
(D) $1\le x<4$.

La risposta corretta è la (B)

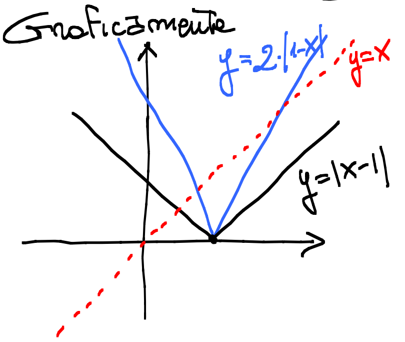
$|x+2|1-x||<2 \iff -2<x+2|1-x|<2 \iff -2-x<2|1-x|<2-x$

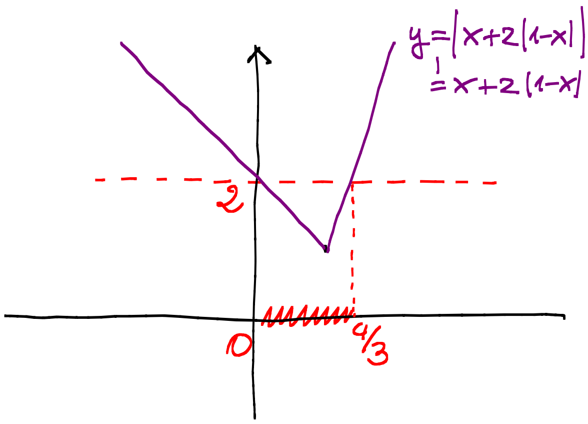
$\iff \begin{cases} -1-\frac{x}{2}<1-x \\ -1-\frac{x}{2}<x-1 \end{cases}$ o $\frac{x}{2}-1<1-x\le 1-\frac{x}{2}$

$\iff \begin{cases} -2<-\frac{x}{2} \\ 0<\frac{3}{2}x \end{cases}$ o $\begin{cases} \frac{3}{2}x<2 \\ 0<\frac{x}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} 4>x \\ 0<x \end{cases}$ o $\begin{cases} x<4/3 \\ 0<x \end{cases}$

$\iff 0<x<4/3$

Graficamente





(7) I coniugi Bianchi invitano due coppie di amici, i Rossi e i Verdi. Così la signora prepara due segnaposto bianchi, due rossi e due verdi. In quanti modi può disporre a tavola i sei segnaposto colorati?

(A) 24.
(B) 90.
(C) 60.
(D) 40.

La risposta corretta è la (B) infatti
detti B, R e V i segnaposti rispettivamente bianco, rosso e verde, dobbiamo contare gli anagrammi di

BB RR VV

e questi sono $\frac{6!}{2!\,2!\,2!} = \frac{720}{8} = 90$

in quanto $6!$ = anagrammi parola 6 lettere ≠ tra loro
ma devo poi dividere per $2!$ in quanto ho 2 lettere B
" " " " " " " " R
" " " " " " " " V

II Parte : Problemi a risposta aperta

1) Determinate le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ del sistema

$$\begin{cases} |z-3+4i| = |4-3i| \\ |z-3+4i| = |z-1| \, . \end{cases}$$

Posto $z = a+ib$, il sistema diventa

$$\begin{cases} \left((a-3)^2+(b+4)^2\right)^{1/2} = (4^2+3^2)^{1/2} \\ \left((a-3)^2+(b+4)^2\right)^{1/2} = \left((a-1)^2+b^2\right)^{1/2} \end{cases} \iff \begin{cases} (a-3)^2+(b+4)^2 = 25 \\ \cancel{a^2}-6a+9+\cancel{b^2}+8b+16 = \cancel{a^2}-2a+1+\cancel{b^2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (2b+3)^2+(b+4)^2 = 25 \\ \cancel{8}^{2}b+2\cancel{4}^{6} = \cancel{4}^{1}a \end{cases} \iff \begin{cases} 4b^2+12b+\cancel{9}+b^2+8b+\cancel{16} = \cancel{25} \\ a = 2b+6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 5b^2+20b = 5b(b+4) = 0 \\ a = 2b+6 \end{cases} \iff \begin{cases} b=0 \\ a=6 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} b=-4 \\ a=-2 \end{cases}$$

$$\iff z_1 = 6 \quad z_2 = -2-4i$$

2) Data la funzione $f(x) = 3x + \log(6+1/x)$, determinatene il dominio, i limiti agli estremi del dominio, le equazioni degli eventuali asintoti e le regioni di monotonia, studiando la natura dei punti stazionari. Tracciate, utilizzando le informazioni ottenute, il grafico della funzione.

(solo **Analisi Matematica 1**) Determinate, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

Dominio: è necessario che $6+\frac{1}{x} > 0 \iff \frac{6x+1}{x} > 0$

$\iff x < -\frac{1}{6}$ or $0 < x \iff D(f) =]-\infty, -\frac{1}{6}[\cup]0,+\infty[$

Limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to\pm\infty} 3x + \ln\left(6+\frac{1}{x}\right) = \pm\infty + \ln\left(6+\frac{1}{\pm\infty}\right) = \pm\infty + \ln 6 = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{6}^-} 3x+\ln\left(6+\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2} + \ln(0^+) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} 3x+\ln\left(6+\frac{1}{x}\right) = 0 + \ln\left(6+\frac{1}{0^+}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$$

e dunque $x=0$ e $x=-\frac{1}{6}$ sono asintoti verticali

Inoltre $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[3 + \frac{1}{x}\ln\left(6+\frac{1}{x}\right)\right] = 3 + \frac{\ln 6}{\pm\infty} = 3$

e $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-3x) = \lim_{x\to\pm\infty} \ln\left(6+\frac{1}{x}\right) = \ln(6)$

dunque $y = 3x+\ln(6)$ è asintoto obliquo

Studio della monotonia

$$f'(x) = 3 + \frac{1}{6+\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{18x^2+3x-1}{6x^2+x} = 0 \quad \text{se}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+72}}{36} = \begin{cases} -1/3 \\ +1/6 \end{cases}$$

e dunque $\quad 18x^2+3x+1 > 0$ se $x < -\frac{1}{3}$ o $\frac{1}{6} < x$

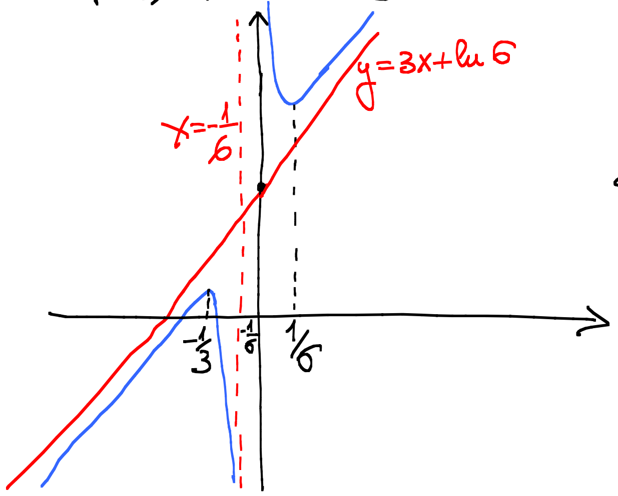
$\quad 6x^2+x > 0$ se $x < -1/6$ o $0 < x$

e quindi

$$f'(x) \begin{cases} >0 & x<-1/3 \\ <0 & -\frac{1}{3}<x<-1/6 \\ <0 & 0<x<1/6 \\ >0 & \frac{1}{6}<x \end{cases} \iff f(x) \begin{cases} \nearrow & x<-1/3 \\ \searrow & -\frac{1}{3}<x<-1/6 \\ \searrow & 0<x<1/6 \\ \nearrow & \frac{1}{6}<x \end{cases}$$

Ne segue che $f(-\frac{1}{3}) = -1 + \ln 3 > 0$ è p.to di max relativo

$f(-\frac{1}{3}) < f(1/6) = \frac{1}{2} + \ln 12$ è " " min "



Un grafico approssimativo della funzione f

Infine $\quad k < -1+\ln(3)$ o $k > \frac{1}{2}+\ln(12) \Rightarrow f(x)=k$ ha 2 soluzioni

$k = -1+\ln(3)$ o $k = \frac{1}{2}+\ln(12) \Rightarrow f(x)=k$ ha 1 soluzione

$-1+\ln(3) < k < \frac{1}{2}+\ln(12) \Rightarrow f(x)=k$ ha 0 soluzioni

3) Sia $a_n = \int_0^{1/n^\alpha} x^{\alpha+2}\, dx$.

a) Determinate i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali $a_n \in \mathbb{R}$ per ogni $n \geq 1$ e quelli per cui $a_n = +\infty$ per ogni $n \geq 1$.

b) Determinate par quali valori di α si ha $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

c) Determinate per quali valori di α la serie $\sum a_n$ è convergente.

$$\int x^{\alpha+2} dx = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+3}}{\alpha+3} + c & \text{se } \alpha+3 \neq 0 \\ \ln|x| + c & \text{se } \alpha+3 = 0 \end{cases} \qquad c \in \mathbb{R}$$

Osservando che $\left[\ln|x|\right]_{x=0}^{x=1/n^\alpha} = +\infty$, si ha che

$$a_n = \int_0^{1/n^\alpha} x^{\alpha+2}\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha+3 \le 0 \\ \dfrac{1}{(\alpha+3)(n^\alpha)^{\alpha+3}} = \dfrac{1}{(\alpha+3)\, n^{\alpha^2+3\alpha}} & \text{se } \alpha+3>0 \end{cases}$$

Ne segue che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(\alpha+3)\,n^{\alpha^2+3\alpha}} = 0$ se $\begin{cases}\alpha+3>0\\ \alpha^2+3\alpha>0\end{cases}$

se $\begin{cases}\alpha+3>0\\ \alpha>0\end{cases}$ se $\alpha>0$

che risponde al quesito b)

Infine $\sum_n a_n = \sum_n \dfrac{1}{(\alpha+3)\,n^{\alpha^2+3\alpha}}$ se $\alpha+3>0$

converge se $\begin{cases}\alpha+3>0\\ \alpha^2+3\alpha>1\end{cases}$ se $\begin{cases}\alpha+3>0\\ \alpha\in\left]-\infty, \frac{-3-\sqrt{13}}{2}\right[\cup\left]\frac{-3+\sqrt{13}}{2}, +\infty\right[\end{cases}$

se $\alpha \in \left]\frac{-3+\sqrt{13}}{2}, +\infty\right[$

in questo

$\alpha^2+3\alpha-1=0$ se $\alpha_{1,2} = \dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$ e $\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2} > -3$

4) Sia data la funzione $f(x) = \log\left(\cos\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\right) + \sin^2(x)$.

a) Determinate lo sviluppo di Taylor di ordine 3 di f centrato in $x_0 = 0$.

b) Posto $f_\alpha(x) = \log\left(\cos\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\right) + \alpha\sin^2(x)$, determinate (se esiste) il valore di α per cui $\lim\limits_{x\to0^+} x^{-3} f_\alpha(x) = \ell \in \mathbb{R}$, e calcolate esplicitamente ℓ.

$(\operatorname{sen} x)^2 = (x+o(x^2))^2 = x^2 + o(x^3)$ per $x\to0$

$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)$ per $t\to0$ da cui segue

$$\cos\left(2x-\frac{x^2}{2}\right) = 1 - \frac12\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o\left((2x+o(x))^3\right)$$

$$= 1 - \frac12\left(4x^2-2x^3\right) + o(x^3)$$

$$= 1-2x^2+x^3+o(x^3) \quad \text{per } x\to0$$

$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$

$$\ln\left(\cos\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\right) = \ln\left(1-2x^2+x^3+o(x^3)\right) =$$

$$= -2x^2+x^3+o(x^3) - \frac12\left(-2x^2+x^3+o(x^3)\right)^2 + o\left(\left(-2x^2+o(x^2)\right)^2\right)$$

$$= -2x^2+x^3+o(x^3) \quad \text{per } x\to0$$

Dunque $f(x) = -2x^2 + x^3 + o(x^3) + x^2 + o(x^3)$

$= -x^2 + x^3 + o(x^3)$ per $x \to 0$

Adesso $f_\alpha(x) = \ln\left(\cos\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\right) + \alpha \operatorname{sen}^2 x =$

$= -2x^2 + x^3 + o(x^3) + \alpha x^2$

$= x^2(\alpha - 2) + x^3 + o(x^3)$ per $x \to 0$

e si ha

$\lim_{x \to 0^+} x^{-3} \cdot \left[x^2(\alpha-2) + x^3 + o(x^3)\right] =$

$= \frac{\alpha - 2}{x} + 1 + o(1) = \begin{cases} -\infty & \alpha < 2 \\ 1 & \alpha = 2 \\ +\infty & \alpha > 2 \end{cases}$