Analisi Matematica 1

Prova scritta del 14 gennaio 2016

CORREZIONE

(2) Il valore di $\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx$ è

(A) $1-\sqrt{2}/2$.

(B) 1 .

(C) $1+\log(\pi/4)$.

(D) $\log\sqrt{2}$.

$$\int_0^{\pi/4} \tan(x)\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx \underset{\substack{\cos x = y \\ dy = -\operatorname{sen} x\,dx}}{=} \int_1^{\sqrt{2}/2} -\frac{dy}{y} = \Big[-\log|y|\Big]_{y=1}^{y=\frac{\sqrt{2}}{2}} = \log 1 - \log\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \log\sqrt{2}$$

(6) Sull'intervallo $[-1,2]$, l'immagine di $f(x)=e^{2+2|x|-x}$ è

(A) $[e^2,e^5]$.

(B) $[f(-1),f(2)]$.

(C) $[e^4,e^5]$.

(D) $[0,e^5]$.

f è continua e dunque esistono $\min f([-1,2])$ e $\max f([-1,2])$

Inoltre, per il Teorema dei Valori Intermedi

$$f([-1,2]) = [\min f([-1,2]), \max f([-1,2])]$$

$$f(x) = e^{2+2|x|-x} = \begin{cases} e^{2+x}, & \text{se } x>0 \\ e^{2-3x}, & \text{se } x\le 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} e^{2+x} & \text{se } x>0 \\ -3e^{2-3x} & \text{se } x<0 \end{cases}$$

e dunque f è decrescente su $(-1,0)$, crescente su $(0,2)$

Ne segue che $f(0) = \min f([-1,2]) = e^2$

$$\max\{f(-1), f(2)\} = f(-1) = e^5 = \max f([-1,2])$$

e dunque $f([-1,2]) = [e^2, e^5]$

(4) Il limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(n!e^{-2n}+1\right)^{1/n}$ vale

(A) $1/e^4$.

(B) $+\infty$.

(C) e^{-2} .

(D) $1/e^3$.

Ricordo che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}$ (segue dal fatto che, posto $a_n = \frac{n!}{n^n}$, si ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{1}{e} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \to 1/e$)

Dunque

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n!\cdot e^{-2n}+1}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n \cdot e^{2n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^2}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e^3}$$

(7) I valori di $\alpha > 0$ per i quali converge la serie $\displaystyle\sum_n \frac{\operatorname{sen}(n^{-1}+n^{-2\alpha})}{n^{1/6}}$ sono

(A) $\alpha > 5/18$.

(B) $\alpha > 5/3$.

(C) $\alpha > 5/6$.

(D) $\alpha > 5/12$.

Posto $a_n = \frac{1}{n^{1/6}} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$, si ha che

$$\lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\cdot\frac{1}{n^{1/6}}}{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\cdot\frac{1}{n^{1/6}}} = 1$$

Ma $\sum_n \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\frac{1}{n^{1/6}} = \sum_n \left(\frac{1}{n}\right)^{1+1/6} + \sum_n \left(\frac{1}{n}\right)^{2\alpha+1/6}$

dove

$\sum_n \left(\frac{1}{n}\right)^{7/6}$ converge e $\sum_n \left(\frac{1}{n}\right)^{2\alpha+\frac{1}{6}}$ converge se $2\alpha+\frac{1}{6}>1$

se $2\alpha > \frac{5}{6}$

se $\alpha > 5/12$

e dunque $\sum_n \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\frac{1}{n^{1/6}}$ converge se $\alpha > 5/12$

Per il criterio del confronto asintotico $\sum_n a_n$ converge se $\alpha > 5/12$

(3) Il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(e^x-1)-1+x^2/2}{x^3}$ vale

(A) $1/6$.

(B) $1/2$.

(C) $-1/4$.

(D) $-1/2$.

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \Rightarrow \cos(e^x-1) = 1 - \frac{1}{2}\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)^2 + o(x^3)$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\cos(e^x-1)-1+\frac{x^2}{2}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{2}$$

(1) In una classe di 30 studenti, 20 giocano a calcio, 18 giocano a basket e 3 non giocano né a calcio né a basket. Qual è la probabilità che uno studente giochi sia a calcio che a basket?

(A) $14/30$.

(B) $5/27$.

(C) $11/30$.

(D) $8/27$.

$30-3=27$ sono gli studenti che giocano a calcio o a basket.

Inoltre 20 giocano a calcio, 18 giocano a basket, e dunque $38-27=11$ devono necessariamente giocare sia a calcio che a basket.

Ne segue che la probabilità cercata è $P = 11/30$, ovvero la risposta (C) è vera

(5) Sia $w = (3 - \mathrm{i}\sqrt{3})^{11}$. Allora

(A) $w = 12^{11/2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\right)$.

(B) $w = 12^{5}(\sqrt{3} + 3\mathrm{i})$.

(C) $w = 12^{5}(-\sqrt{3} + 3\mathrm{i})$.

(D) $w = 12^{11/2}\left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$$w = (3 - i\sqrt{3})^{11} = (\sqrt{3}\cdot 2)^{11}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^{11} = (12)^{11/2}\cdot\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{11}{6}\pi\right)^{11}$$

$$\underset{\uparrow}{=} (12)^{11/2}\left(\cos\frac{121}{6}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{121}{6}\pi\right) \underset{\uparrow}{=} (12)^{11/2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)$$

Applico De Moivre

periodicità di $\mathrm{sen}\,x$ e $\cos x$: $\frac{121}{6}\pi = 20\pi + \pi/6$

$$= (12)^{11/2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$$

II parte, esercizi a risposta aperta: soluzioni

Determinate le soluzioni (z, w), con $z, w \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} (z+\mathrm{i})w = -\dfrac{1}{2} \\ (\mathrm{i}w+2)z = -\dfrac{\mathrm{i}}{2}\,. \end{cases}$$

Si osserva che se (z,w) è soluzione del sistema, allora $z \neq 0$ e $w \neq 0$. Si ha

$$\begin{cases} zw + iw = -\frac{1}{2} \\ izw + 2z = -\frac{i}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} zw + iw = -\frac{1}{2} \\ zw - 2iz = -i \cdot -\frac{i}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} iw + 2iz = 0 \\ zw + iw = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = -\frac{w}{2} \\ -\frac{w}{2}\cdot w + iw + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -\frac{w}{2} \\ w^2 - 2iw - 1 = (w-i)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = -\frac{i}{2} \\ w = i \end{cases}$$ e questa è l'unica soluzione del sistema

Considerate la funzione $f(x) = x^3/3 - \log(1+x^2)$.

a) Determinatene dominio, limiti agli estremi, derivata, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo e minimo locale, eventuali asintoti; tracciatene il grafico.

b) Determinate al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

c) Provate che $e^5 > (5/e)^3$; deducetene che $f(2) > 0$.

Dominio: $1+x^2 \geq 1 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{dominio}(f) = \mathbb{R}$

Limiti agli estremi:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{3} - \lim_{x\to-\infty} \ln(1+x^2) = -\infty - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(\frac{1}{3} - \frac{\ln(1+x^2)}{x^3}\right) = +\infty \cdot \left(\frac{1}{3} - 0^+\right) = +\infty$$

in quanto - ad esempio per il Teorema dell'Hopital - si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^3} \underset{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x\right)\cdot\frac{1}{3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{3}\,\frac{1}{x(1+x^2)} = 0^+$$

La funzione $f(x)$ non ha asintoti né verticali né orizzontali. Non ha neppure asintoti obliqui in quanto

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3} - \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = +\infty - 0 = +\infty$$

(infatti $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} \underset{H}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x\right)\cdot\frac{1}{1} = 0$)

Derivata e studio regioni di monotonia

$$f'(x) = x^2 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{x^4+x^2-2x}{1+x^2} = 0 \quad \text{se} \quad x(x-1)(x^2+x+2) = 0$$

in quanto $x^3+x-2=0$ ha radice $x=1$, e dunque

$$\begin{array}{l|l} x^3 \qquad +x \; -2 & x-1 \\ \hline x^3 - x^2 & x^2+x+2 \\ \hline // \; x^2 + x - 2 & \\ \quad x^2 - x & \\ \hline \quad // \; 2x-2 & \\ \quad\quad 2x-2 & \\ \hline \quad\quad // & \end{array}$$

$$x^3+x-2 = (x^2+x+2)(x-1)$$

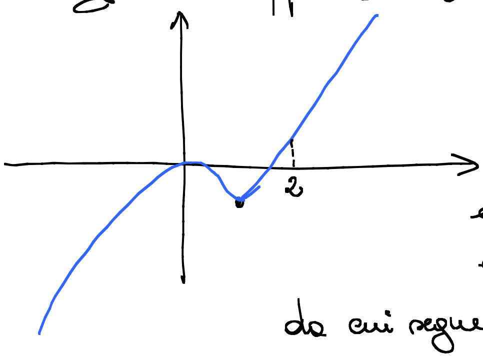
Ne segue che $f'(x) \begin{cases} >0 & x<0 \\ <0 & 0<x<1 \\ >0 & 1<x \end{cases}$

ovvero $f(x) \begin{cases} \text{crescente} & x<0 \\ \text{decrescente} & 0<x<1 \\ \text{crescente} & 1<x \end{cases}$ da cui segue

$(0, f(0)) = (0,0)$ p.to di massimo locale

$\left(1, f(1)\right) = \left(1, \frac{1}{3} - \ln 2\right) = \left(1, \ln \sqrt[3]{\frac{e}{8}}\right)$ punto di minimo locale

Un grafico approssimato è il seguente



Si osserva che

$e^5 > 2^5 > \left(\frac{5}{e}\right)^5 > \left(\frac{5}{e}\right)^3$

e quindi $e^8 > 5^3 = e^{3\ln(5)}$

e quindi $8 > 3\ln(5)$

da cui segue $\frac{8}{3} - \ln(5) = f(2) > 0$

Ne segue che esiste $\alpha \in \left]1,2\right[$ t.c. $f(\alpha) = 0$

Infine $\quad k < f(1) = \frac{1}{3} - \ln 2 = \ln\sqrt[3]{\frac{e}{8}} \Rightarrow f(x)=k$ ha 1 soluzione

$k = f(1)$ o $k=0 \Rightarrow f(x)=k$ ha 2 soluzioni

$f(1) < k < 0 \Rightarrow f(x)=k$ ha 3 soluzioni

$0 < k \Rightarrow f(x)=k$ ha 1 soluzio

3a) Scrivete i polinomi di Taylor di ordine 3, centrati in $x_0 = 0$, delle funzioni

$$f(x) = \log(\cos x - 3 \operatorname{sen} x), \quad g(x) = e^{3x+(x^2/2)} - 1, \quad h(x) = f(x) + g(x).$$

3b) Calcolate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il valore di $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha h(x)$.

3c) **(FACOLTATIVO)** Anziché quelli di ordine 3, scrivete i polinomi di Taylor di ordine 4 di f, g ed h.

Quando $x \to 0$ $\quad \cos(x) - 3\operatorname{sen}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) - 3\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)$

$\qquad = 1 - 3x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$

Inoltre $\ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + o(t^3) \quad t \to 0$, da cui segue

$f(x) = \ln\left(1 - \left(3x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right)\right) =$

$= -\left(3x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(3x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(3x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2}\right)^3 + o\left((3x+o(x))^3\right)$

$= -3x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{1}{2}\left(3x + \frac{x^2}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}(3x)^3 + o(x^3)$

$= -3x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{9}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{27}{3}x^3 + o(x^3)$

$$\Rightarrow f(x) = -3x - 5x^2 - 10x^3 + o(x^3)$$

Inoltre, per $t \to 0$ si ha

$$e^t - 1 = t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$$

$$\Rightarrow g(x) = e^{3x+\frac{x^2}{2}} - 1 = 3x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\left(3x + \frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(3x + \frac{x^2}{2}\right)^3 + o\left(\left(3x + \frac{x^2}{2}\right)^3\right)$$

$$= 3x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\left(9x^2 + 3x^3\right) + \frac{1}{6}\left(27x^3\right) + o(x^3)$$

$$= 3x + 5x^2 + 6x^3 + o(x^3) \qquad x \to 0$$

Ne segue che

$$h(x) = f(x) + g(x) = -3x - 5x^2 - 10x^3 + 3x + 5x^2 + 6x^3 + o(x^3)$$

$$= -4x^3 + o(x^3) \qquad x \to 0$$

Ne segue che

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \cdot h(x) = \lim_{x \to 0^+} -4x^{3+\alpha} = \begin{cases} -\infty & \text{se } \alpha < -3 \\ -4 & \text{se } \alpha = -3 \\ 0 & \text{se } \alpha > -3 \end{cases}$$

Facoltativo:

$$\cos(x) - 3\,\mathrm{sen}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) - 3x + \frac{x^3}{2} + o(x^4)$$

$$= 1 - 3x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \qquad x \to 0$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)$$

$$f(x) = \ln(\cos x - 3\,\mathrm{sen}\,x) = \log\left(1 + \left(-3x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\right)$$

$$= -3x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\left(-3x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-3x - \frac{x^2}{2}\right)^3 - \frac{1}{4}(-3x)^4 + o(x^4)$$

$$= -3x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\left(9x^2 + 3x^3 + \frac{x^4}{4} - 3x^4\right) + \frac{1}{3}\left(-27x^3 - \frac{27}{2}x^4\right) - \frac{81}{4}x^4 + o(x^4)$$

$$= -3x - 5x^2 + x^3\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} - 9\right) + x^4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{3}{2} - \frac{9}{2} - \frac{81}{4}\right) + o(x^4)$$

$$= -3x - 5x^2 - 10x^3 - \frac{70}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$g(x) = e^{3x+\frac{x^2}{2}} - 1 = \cancel{1} + 3x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\left(9x^2 + 3x^3 + \frac{x^4}{4}\right) + \frac{1}{6}\left(27x^3 + \frac{27}{2}x^4\right) + \frac{1}{24}\cdot 81x^4 + o(x^4) - \cancel{1}$$

$$= 3x + 5x^2 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^3 + \frac{x^4}{8} + \frac{}{4}x^4 + \frac{27}{8}x^4 + o(x^4)$$

$$= 3x + 5x^2 + 6x^3 + \frac{23}{4}x^4 + o(x^4)$$

$$\Rightarrow h(x) = f(x) + g(x) = -4x^3 - \frac{211}{12}x^4 + o(x^4)$$

4) Scrivete la formula di Stirling.

a) Studiate la convergenza di $\sum_n \frac{n!}{n^n}$.

b) Studiate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza di $\sum_n \left(\frac{n!}{n^n}\right)^\alpha$.

c) **(SOLO ANALISI 1)** Studiate al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ la convergenza di $\sum_n \frac{n!}{n^{\beta n}}$.

Posto $a_n = \frac{n!}{n^n}$ si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e} \in (0,1)$$

$\Rightarrow \sum_n \frac{n!}{n^n}$ converge per il criterio del rapporto

b) Analogamente, sempre per il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}^\alpha}{a_n^\alpha} = \left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e^\alpha} \in (0,1) \quad \text{se } \alpha > 0$$

c) Infine, posto $b_n = \frac{n!}{n^{\beta n}}$ si ha

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{\beta(n+1)}} \cdot \frac{n^{\beta n}}{n!} = \frac{n+1}{(n+1)^{\beta n}} \cdot \frac{n^{\beta n}}{(n+1)^\beta}$$

$$= \left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]^\beta \cdot \frac{1}{(n+1)^{\beta-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} \left(\frac{1}{e}\right)^\beta \cdot \left(\frac{1}{+\infty}\right) = 0 & \text{se } \beta > 1 \\ \frac{1}{e} & \text{se } \beta = 1 \\ \left(\frac{1}{e}\right)^\beta \cdot (+\infty) = +\infty & \text{se } \beta < 1 \end{cases}$$

e dunque $\sum_n b_n$ converge se $\beta \geq 1$ per il criterio del rapporto

oppure (soluzione alternativa)

La formula di Stirling: $\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq ne\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \forall n \geq 1$
questa permette di ottenere le stime

$$\frac{1}{e^n} \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{n}{e^{n-1}}$$

e dalla convergenza di $\sum_n \frac{1}{e^n}$ e di $\sum_n \frac{n}{e^{n-1}}$ segue la convergenza di $\sum_n \frac{n!}{n^n}$

Analogamente

$$\left(\frac{1}{e^\alpha}\right)^n \leq \left(\frac{n!}{n^n}\right)^\alpha \leq \left(\frac{n}{e^{n-1}}\right)^\alpha \qquad \alpha > 0 \quad n \geq 1$$

ci permette di concludere che $\sum_n \left(\frac{n!}{n^n}\right)^\alpha$ converge se $\alpha > 0$ (utilizzando il criterio confronto)

Infine

$$\left(\frac{1}{e} \cdot \frac{1}{n^{\beta-1}}\right)^n \leq \frac{n!}{n^{\beta n}} \leq \frac{ne}{(e \cdot n^{\beta-1})^n}$$

ci permette di concludere che $\sum_n \frac{n!}{n^{\beta n}}$ converge $\forall \beta \geq 1$

NOTA

Si sa che $e^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad e^x = \left(e^{x/k}\right)^k \geq \left(1+x/k\right)^k \quad \forall k>0 \quad \forall x>0$

Dunque $\quad e^5 = \left(e^{5/2e}\right)^{2e} \geq \left(1+\frac{5}{2e}\right)^{2e} = \left(\frac{2e+5}{2e}\right)^{2e} > \left(\frac{5}{e}\right)^{2e} > \left(\frac{5}{e}\right)^3$

in quanto $\quad 1+\frac{5}{2e} = \frac{2e+5}{2e} > \frac{5}{e} \Leftrightarrow 2e+5>10$

$\Longleftrightarrow 2e > 5$

$\Longleftrightarrow e > 5/2$ che è vera

inoltre $\quad 2 \cdot e > 5 > 3$