Analisi Matematica 1 - Ingegneria Gestionale a.a. 2015/16

Prova Scritta dell'11 gennaio 2016 - Seconda Parte

CORREZIONE

1) Scrivete in forma algebrica tutte le soluzioni $(z,w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ del sistema

$$\begin{cases} \bar{w} z = (2i - 3)|z|^2 \\ z + w = 1 - 2i \,. \end{cases}$$

$$\begin{cases} z\left[\bar{z}(2i-3) - \bar{w}\right] = 0 \\ w = 1-2i-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 0 \\ w_1 = 1-2i \end{cases} \text{ o } \begin{cases} z(-2i-3) - w = 0 \\ w = 1-2i-z \end{cases}$$

Calcoliamo ora (z_2, w_2)

$$\begin{cases} w = -(3+2i)z \\ w = 1-2i-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-2i-z = -3z-2iz \\ w = 1-2i-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-2i = -2(1+i)z \\ w = 1-2i-z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1-2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} \\ w = 1-2i-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{2} \frac{1-i-2i-2}{2} = \frac{1}{4}(1+3i) \\ w = 1-2i - \frac{1}{4} - \frac{3}{4}i = \frac{3}{4} - \frac{11}{4}i \end{cases}$$

Quindi le due soluzioni sono

$$(z_1, w_1) = (0, 1-2i) \quad \text{e} \quad (z_2, w_2) = \left(\frac{1}{4}(1+3i) \,;\, \frac{1}{4}(3-11i)\right)$$

2) Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 2\log|x+1| \,.$$

a) Determinatene il dominio, i limiti agli estremi del dominio, gli intervalli di monotonia, i massimi/minimi locali, gli intervalli di convessità/concavità.

b) Determinate con un errore più piccolo di 0.5 tutte le soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$.

c) Usando queste informazioni, tracciate poi un grafico qualitativo della funzione.

d) Determinate al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

e) **(Solo Analisi Mat. 1)** Calcolate l'area dell'insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 0,\ 0 < y < f(x)\} \,.$$

- Dominio di $f = \{x \in \mathbb{R} : x+1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- Limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^2\left(\frac{1}{2} - 2\frac{\log|x+1|}{x^2}\right) = +\infty \qquad \lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1}\left(\frac{x^2}{2} - 2\log|x+1|\right) = \frac{1}{2} - 2\log|0| = +\infty$$

Osserviamo che $f(0) = 0$ e che

$x = -1$ è un asintoto verticale

Inoltre la f.ne non ha asintoti obliqui

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty}\left[\frac{x}{2} - 2\frac{\log|x+1|}{x}\right] = \lim_{x \to +\infty} x\left[\frac{1}{2} - 2\frac{\log|x+1|}{x^2}\right] = +\infty(1-0^-) = +\infty \notin \mathbb{R}$$

e analogamente

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} x\left(\frac{1}{2} - 2\frac{\log|1+x|}{x^2}\right) = -\infty\left(\frac{1}{2} - 0^+\right) = -\infty(1-0^-) = -\infty \notin \mathbb{R}$$

• Intervalli di monotonia : $f'(x) = x - \frac{2}{|x+1|}\cdot\frac{x+1}{|x+1|} = x - \frac{2}{(x+1)}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2+x-2}{(x+1)} = 0$ se $x=-2$ o $x=1$ $\Rightarrow f'(x) \begin{cases} >0 & 1<x \\ <0 & -1<x<1 \\ >0 & -2<x<-1 \\ <0 & x<-2 \end{cases}$

$x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}$ ⟨ 1, -2

Quindi

$$f(x) \begin{cases} \text{decresce} & \text{se } x<-2 \\ \text{cresce} & \text{se } -2<x<-1 \\ \text{decresce} & \text{se } -1<x<1 \\ \text{cresce} & \text{se } 1<x \end{cases}$$

Ne segue che $x=-2$ e $x=1$ sono punti di minimo, ed essendo $f(-2)=2-2\log|-2+1|=2>0>f(1)=\frac{1}{2}-2\log 2$ ne segue $f(1)=\min f(\mathbb{R}\setminus\{-1\}) = \frac{1}{2}-\log 4$

• Intervalli di concavità/convessità

$f''(x) = \left(x - \frac{2}{x+1}\right)' = 1 + \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \ \forall x \neq -1$, ovvero

$f(x)$ è convessa $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

• $f(x) \geq f(-2) = \min f(]-\infty,-1[) = 2 > 0 \ \forall x<-1$

mentre $f(0)=0$, $f'(x)<0$ $-1<x<1$, $f(1)=\min f(]-1,+\infty[)<0$

e $f'(x)>0 \ \forall x>1$

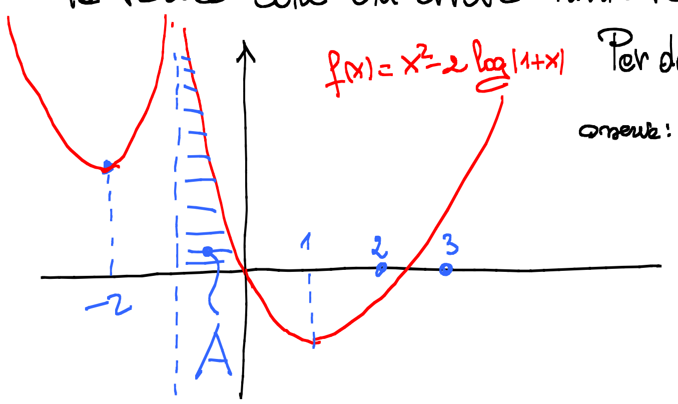
Ne segue che $f(0)=0$ ed esiste $\bar{x}>1$ t.c. $f(\bar{x})=0$

Si ha $f(1)=\frac{1}{2}-2\log 2 = \log e - \log 4 < 0$

$f(2) = 2 - 2\log 3 = 2\log e - 2\log 3 < 0$

$f(3) = \frac{9}{2} - 2\log 4 = \frac{3}{2}\log(e^3) - \log(16) > 0$

e dunque $\bar{x} \in]2,3[$: preso $\bar{x}=\frac{5}{2}$ abbiamo approssimato la radice con un errore minore di 0,5.



Per determinare il n.ro di soluzioni si osserva:

$k<f(1) \Rightarrow f(x)=k$ ha $\emptyset$ sol

$k=f(1) \Rightarrow$ " " 1 "

$f(1)<k<f(-2) \Rightarrow$ " " 2 "

$k=f(-2) \Rightarrow$ " " 3 "

$f(-2)<k \Rightarrow$ " " 4 "

$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1<x<0,\ 0<y<\frac{x^2}{2}-2\log(x+1)\} = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx$

Si ha $\int_{-1}^{0}\log(x+1)\,dx \underset{y=x+1}{=} \int_0^1 \log y\,dy = \left[y\log y - y\right]_{y=0}^{y=1} = -1$, e quindi

$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0}\frac{x^2}{2}dx - \frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{0}\log(x+1)\,dx = \left[\frac{-x^3}{6}\right]_{x=-1}^{x=0} - 2(-1) = \frac{1}{6}+2 = \frac{13}{6}$

ovvero area$(A)=\frac{13}{6}$

3) Calcolate lo sviluppo di Taylor centrato in $x_0 = 0$ e di ordine 4 della funzione

$$g(x) = \frac{1}{2}\log(1+2x) + \operatorname{sen}(x^2 - x)\ .$$

Dite poi per quali valori di $c \in \mathbb{R}$ risulta

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)+c\,x^3}{x^3} = 0\ .$$

Calcolate infine al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{x\to 0+} x^\alpha g(x)\ .$$

$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + o(y^4) \quad y\to 0$

$\Rightarrow \log(1+2x) = +2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^4 + o(x^4) \quad x\to 0$

$\operatorname{sen}(y) = y - y^3/6 + o(y^4) \quad y\to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen}(x^2-x) = x^2 - x - \frac{1}{6}(x^2-x)^3 + o(x^4) = x^2 - x + \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) \Rightarrow$

$g(x) = \frac{1}{2}\log(1+2x) + \operatorname{sen}(x^2-x) = \left(2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^4\right)\frac{1}{2} - x + x^2 + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$

$= \cancel{x} - \cancel{x^2} + \frac{4}{3}x^3 - 2x^4 - \cancel{x} + \cancel{x^2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$

$= \frac{9}{6}x^3 - \frac{5}{2}x^4 + o(x^4) = \frac{3}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^4 + o(x^4)$

Per $x\to 0$

$\frac{g(x)+cx^3}{x^3} = \frac{\frac{3}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^4 + cx^3 + o(x^4)}{x^3} = \frac{x^3\left(c+\frac{3}{2}\right) - \frac{5}{2}x^4 + o(x^4)}{x^3}$

$\xrightarrow[x\to 0^+]{} \begin{cases} c+\frac{3}{2} & c\neq -\frac{3}{2} \\ 0 & c = -\frac{3}{2} \end{cases}$

Infine si osserva che $g(x) = \frac{3}{2}x^3 + o(x^3)$ e dunque

se $\alpha > -3$ allora $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha g(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{3}{2}x^{\alpha+3} + o(x^{\alpha+3})\right] = 0^-$

se $\alpha = -3$ allora $\lim_{x\to 0^+} x^{-3}g(x) = \lim_{x\to 0^+} x^{-3}\cdot\frac{3}{2}x^3 = \frac{3}{2}$

se $\alpha < -3$ allora $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha g(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{3}{2}x^{\alpha+3} = +\infty$

4) Trovate la primitiva $F(x)$ della funzione $f(x) = \dfrac{x-3}{x+\sqrt{x}-2}$ tale che $F(0)=0$.

Per determinare le primitive conviene operare la sostituzione $y=\sqrt{x}$

$$\int \frac{x-3}{x+\sqrt{x}-2}\,dx \underset{\substack{y=\sqrt{x}\\ y^2=x\\ dx=2y\,dy}}{=} \left(\int \frac{y^2-3}{y^2+y-2}\cdot 2y\,dy\right)_{y=\sqrt{x}}$$

(*)
$$= 2\left(\frac{y^2}{2}-y-\frac{2}{3}\log\left|\frac{y-1}{y+2}\right|+c\right)_{y=\sqrt{x}} \qquad c\in\mathbb{R}$$

$$= x-2\sqrt{x}-\frac{4}{3}\log\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}\right|+c \qquad c\in\mathbb{R}$$

Se desidero quella primitiva che in $x=0$ vale 0, allora

$$0-2\sqrt{0}-\frac{4}{3}\log\left|\frac{\sqrt{0}-1}{\sqrt{0}+2}\right|+c = c-\frac{4}{3}\log\frac{1}{2}=0 \Rightarrow c=\frac{4}{3}\log\frac{1}{2}$$

e quindi la primitiva richiesta è

$$F(x)= x-2\sqrt{x}-\frac{4}{3}\log\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}\right|+\frac{4}{3}\log\frac{1}{2}$$

*
$$\begin{array}{ll|l}
y^3 & -3y & y^2+y-2 \\ \cline{3-3}
y^3+y^2 & -2y & y-1 \\ \cline{1-2}
// \ -y^2 & -y & \\
-y^2 & -y+2 & \\ \cline{1-2}
// & -2 &
\end{array}$$

dunque

$$\frac{y^3-3y}{y^2+y-2} = y-1-\frac{2}{y^2+y-2}$$

ma $y^2+y-2=(y+2)(y-1)$ e quindi

$$\frac{1}{(y+2)(y-1)} = \frac{A}{y+2}+\frac{B}{y-1} = \frac{(A+B)y+2B-A}{(y+2)(y-1)} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 2B-A=1 \end{cases} \quad \begin{cases} B=1/3 \\ A=-1/3 \end{cases}$$

$$\int \frac{y^3-3y}{y^2+y-2}\,dy = \int (y-1)\,dy - 2\int \frac{dy}{(y+2)(y-1)} = \frac{y^2}{2}-y-\frac{2}{3}\left\{\int\frac{dy}{y-1}-\int\frac{dy}{y+2}\right\}$$

$$= \frac{y^2}{2}-y-\frac{2}{3}\log\left|\frac{y-1}{y+2}\right|+c \qquad c\in\mathbb{R}$$