Analisi Matematica 1 - Ing. Gestionale

Prova scritta del 16 Febbraio 2016

a.a. 2015-16 Correzione

I parte: Quiz a risposta chiusa

Esercizio 1. Tre amici sono nati fra il 1994 e il 1997 (non badate al fatto che uno era bisestile). Qual è la probabilità che siano nati in tre anni diversi?

(A) $3/8$.

(B) $2/3$.

(C) $5/8$.

(D) $1/2$.

Casi possibili: 4^3 $\Rightarrow P = \frac{4\cdot3\cdot2}{4^3} = \frac{3}{8}$

Casi favorevoli: $4\cdot3\cdot2$

Per l'amico A, ho 4 scelte possibili (no vincoli)

" " B, " 3 " " (anno(B) $\neq$ anno(A))

" " C, " 2 " " (anno(C) $\neq$ anno(A) $\neq$ anno(B))

La risposta corretta è la (A)

Osserviamo che $4\cdot3\cdot2$ sono tutti i modi in cui posso scegliere 3 elementi diversi presi da un insieme di 4 elementi, ovvero in quanti modi posso disporre 3 elementi presi da un insieme di 4 elementi

$\boxed{4}\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{2}$

Esercizio 2. Tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali converge $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{4\alpha-1}+x^{3\alpha}}\,dx$ sono:

(A) $\alpha > 1/3$.

(B) $\alpha > 1/2$.

(C) $\alpha > 1$.

(D) $\alpha > -1/2$.

$f = \frac{1}{x^{4\alpha-1}+x^{3\alpha}}$ è continua su $[1,+\infty)$, dunque devo studiare f solo quando $x \to +\infty$

$f(x) = \frac{1}{x^{4\alpha-1}+x^{3\alpha}} \sim \frac{1}{x^\beta}$ per $x \to +\infty$

dove $\beta = \max\{4\alpha-1, 3\alpha\}$

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\beta} \in \mathbb{R}$ sse $\beta > 1$ sse $4\alpha-1 > 1$ o $3\alpha > 1$

sse $\alpha > 1/2$ o $\alpha > 1/3$

sse $\alpha > 1/3$

e dunque, per il Teorema del confronto asintotico,

$\int_1^{+\infty} f(x)dx \in \mathbb{R}$ se $\alpha > 1/3$

e dunque la risposta corretta è la (A)

Esercizio 3. Se $|z|^2 = 20$ e $|z|(\Re z + 2\Im z) = 0$ allora z potrebbe essere

(A) $-4 + 2i$.
(B) 0.
(C) $\sqrt{10}(1 - i)$.
(D) $2 - 4i$.

Se $|z|^2 = 20$ allora $|z| = \sqrt{20} \neq 0$ allora $\Re z = -2\Im z$

(B) impossibile : $|z| = \sqrt{20} \neq 0$

(C) impossibile : $|\sqrt{10} \cdot (1-i)| = \sqrt{20}$ ma $\Re z = \sqrt{10} = -\Im z$

e dunque $\Re z + 2\Im z \neq 0$

(D) impossibile : $|(2-4i)| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$ e questo va bene

però $\Im z = -4 = -2\Re z$

e dunque $\Re z + 2\Im z = 2 - 8 \neq 0$

(A) è vera : $|-4+2i| = \sqrt{20}$ e $\Re z + 2\Im z = -4+4 = 0$

Esercizio 4. Sia $a \in \mathbb{R}$ tale che $\int_0^a e^{-x}\,dx = 1/3$. Allora:

(A) $a = \log 3 - \log 2$.
(B) $a = \log(2/3)$.
(C) $a = e^{3/2}$.
(D) $a = \log(1/3)$.

$$\int_0^a e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^a = 1 - e^{-a} = 1/3 \Rightarrow \frac{2}{3} = e^{-a}$$

$$\Rightarrow -a = \ln 2 - \ln 3 \Rightarrow a = \ln 3 - \ln 2$$

e quindi la risposta corretta è la (A)

Esercizio 5. La retta di equazione $y = 6x + 5$ è tangente in $(0, 5)$ al grafico della seguente funzione:

(A) $f(x) = 3\,\mathrm{sen}(2x) + 5\cos(4x)$.
(B) $f(x) = 6^x + 4$.
(C) $f(x) = \log\left(\frac{x+1}{6}\right) + 5$.
(D) $f(x) = e^{x^2}(x + 5)$.

(A) è vera : $f' = 6\cos 2x - 20 \,\mathrm{sen}\, 4x$ $\quad f'(0) = 6$ $\quad f(0) = 5 \Rightarrow$ la tg è

$y = 5 + 6x$

(B) è falsa : $f' = 6^x \ln 6$ $\quad f'(0) = \ln 6 \neq 6$

(C) è falsa: $f'(x) = \frac{6}{x+1}$ $f'(0) = 6$ $f(0) = 5 - \ln(6) \neq 5$

(D) " " $f'(x) = e^{x^2} + 2x(x+5)e^{x^2}$ $f'(0) = 1 \neq 6$

Esercizio 6. Se $f(x) = \dfrac{3x^2+2x^3}{5x^2-6x^3}$, allora:

(A) $f(x) \to -1/3$ se $x \to -\infty$.

(B) $f(x) \to -\infty$ se $x \to 5/6$.

(C) f non ha limite per $x \to 0$.

(D) $f(x) \to 3/5$ se $x \to +\infty$.

(A) è vera $\lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} \cdot \frac{2 + 3/x}{-6 + 5/x} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$

(B) è falsa $\lim_{x \to 5/6} \frac{3+2x}{5-6x} \cdot \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}$ non esiste (il limite destro è $\neq$ dal limite sinistro)

(C) è falsa: $\lim_{x \to 0} f = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} \cdot \frac{3+2x}{5-6x} = \frac{3}{5}$, dunque $\exists$ (ed è continua)

(D) è falsa: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} \cdot \frac{2 + 3/x}{-6 + 5/x} = -\frac{1}{3} \neq \frac{3}{5}$

Esercizio 7. Per $n \to +\infty$ la successione $\dfrac{\left(n^4 + (3n)^n + 2n\right)^{1/n}}{n^2 \operatorname{sen}(2/n)}$ ha limite

(A) $3/2$.

(B) 0.

(C) $1/2$.

(D) 3.

$$a_n = \frac{3n \cdot \left(1 + \frac{2n}{(3n)^n} + \frac{n^4}{(3n)^n}\right)^{1/n}}{n^2 \operatorname{sen}(2/n)} =$$

$$= \frac{3}{2} \frac{2/n}{\operatorname{sen}(2/n)} \cdot \left(1 + \frac{2n}{(3n)^n} + \frac{n^4}{(3n)^n}\right)^{1/n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{2}$$

e dunque la risposta corretta è la (A). Infatti

$$\underset{\substack{\downarrow n \to +\infty \\ 1}}{1} \leq \left(1 + \frac{2n}{(3n)^n} + \frac{n^4}{(3n)^n}\right)^{1/n} \leq \underset{\substack{\downarrow n \to +\infty \\ 1}}{(1+1+1)^{1/n}}$$

- $\frac{2n}{(3n)^n} \leq 1 \quad \forall n \geq 1 \iff 2n \leq (3n)^n \iff 1 \leq (3n)^{n-1}$

- $\frac{n^4}{(3n)^n} \leq 1 \quad \forall n \geq 1 \iff n^4 \leq 3^n \cdot n^n \quad \forall n \geq 1$

$n=1$ $1 \leq 3$ ✓ $n=2$ $16 \leq 9 \cdot 4 = 36$ ✓ $n=3$ $81 \leq 27 \cdot 27$

e si dimostra che vale $\forall n$

2ª parte: quesiti a risposta aperta

Determinate le soluzioni (z, w), con $z, w \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} z^2 + 2w + 2i\sqrt{3} = 0 \\ \bar{w} + 2i\bar{z} + 1 = 0\,. \end{cases}$$

coniugando l'eq. di 1° grado
$$\begin{cases} w - 2iz + 1 = 0 \\ // \end{cases} \iff \begin{cases} w = 2iz - 1 \\ z^2 + 4iz - 2 + 2i\sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione ha come discriminante

$$\frac{\Delta}{4} = (-2i)^2 + 2 - 2i\sqrt{3} = -2 - 2i\sqrt{3} = 4\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= 4\left(\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right)$$

$\frac{2}{3}+1$

e dunque
$$\sqrt{\frac{\Delta}{4}} = \left\{2\left[\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right] ;\ 2\left[\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{5}{3}\pi\right)\right]\right\}$$
$$= \left\{-1 + i\sqrt{3} ;\ 1 - i\sqrt{3}\right\}$$

da cui segue $z_1 = -2i - 1 + i\sqrt{3} = -1 + i(\sqrt{3} - 2)$ da cui segue
$$z_2 = -2i + 1 - i\sqrt{3} = 1 - i(\sqrt{3} + 2)$$

$$w_1 = 2i\left(-1 + i(\sqrt{3} - 2)\right) - 1 = -2i - 2\sqrt{3} + 4 - 1 = 3 - 2\sqrt{3} - 2i$$
$$w_2 = 2i\left(1 - i(\sqrt{3} + 2)\right) - 1 = 2i + 2\sqrt{3} + 4 - 1 = 3 + 2\sqrt{3} + 2i$$

Considerate la funzione $f(x) = x^2 + x - 2|x|$.

a) Determinatene dominio, segno, limiti agli estremi, eventuali punti di discontinuità, derivata, eventuali punti di non derivabilità, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo e minimo locale, eventuali asintoti, intervalli di convessità; tracciatene un grafico approssimativo.

b) Determinate al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

c) Esiste un'unica retta che è tangente in due punti al grafico di g: determinatene l'equazione.

- Dominio di $f(x)$: $\mathbb{R}$
- Limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - 2\frac{|x|}{x^2}\right) = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

come pure

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} x \left(1 + \frac{1}{x} - 2\frac{|x|}{x^2}\right) = \pm\infty$$

e dunque $\nexists$ asintoti obliqui

- Segno di $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + 3x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-x>0 \\ x\geq 0 \end{cases} \quad \underline{\text{se}} \quad x>1$$

$$\Rightarrow f(x)>0 \quad \text{se} \quad x\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$$

$$\begin{cases} x^2+3x>0 \\ x<0 \end{cases} \quad \underline{\text{se}} \quad x<-3$$

- Punti di discontinuità

la funzione $f(x)$ è continua $\forall x\in\mathbb{R}$, mentre

$$f'(x) = 2x+1-2\frac{x}{|x|} = \begin{cases} 2x-1 & \text{se } x>0 \\ 2x+3 & \text{se } x<0 \end{cases}$$

e dunque $\lim_{x\to 0^-} f' = \lim_{x\to 0^-} 2x+3 = 3 \neq -1 = \lim_{x\to 0^+} 2x-1 = \lim_{x\to 0^+} f'$

da cui segue che $x=0$ p.to in cui f' è discontinua

- Intervalli di monotonia

$$0<f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{se } x>0 \\ 2x+3 & \text{se } x<0 \end{cases} \quad \underline{\text{se}} \quad \begin{cases} 2x-1>0 \\ x>0 \end{cases} \quad \text{o'} \quad \begin{cases} 2x+3>0 \\ x<0 \end{cases}$$

$\underline{\text{se}}$ $x\in(\frac{1}{2},+\infty)$ o $x\in(-\frac{3}{2},0)$

Ne segue che

$$f' \begin{cases} <0 & x<-3/2 \\ >0 & -3/2<x<0 \\ <0 & 0<x<1/2 \\ >0 & \frac{1}{2}<x \end{cases}, \text{ ovvero}$$

9-12-6

$x_1=-\frac{3}{2}$ è punto di minimo relativo $f(-\frac{3}{2}) = \frac{9}{4}-\frac{3}{2}-3 = \frac{-9}{4}$

$x_2=0$ è " " massimo relativo $f(0)=0$

$x_3=\frac{1}{2}$ " " " minimo " $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}-1 = -\frac{1}{4}$

Ma per il corollario del teorema Weierstrass esiste il minimo assoluto, e necessariamente

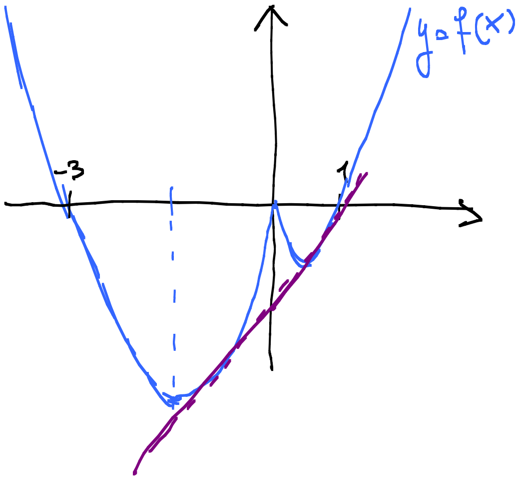
$$\min f(\mathbb{R}) = -\frac{9}{4} = f(-3/2)$$

- Intervalli di convessità

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x>0 \\ 2 & " \ x<0 \end{cases} \quad \text{ovvero } f''=2 \ \forall x\neq 0$$

e la funzione è convessa su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Un grafico approssimativo è il seguente



Le soluzioni di $f(x)=k$ sono

$\emptyset$	se	$k<-\frac{9}{4}$	
1	"	$k=-\frac{9}{4}$	$(x=-\frac{3}{2})$
2	"	$-\frac{9}{4}<k<-\frac{1}{4}$	
3	"	$k=-\frac{1}{4}$	
4	"	$-\frac{1}{4}<k<0$	
3	"	$k=0$	
2	"	$0<k$	

Infine si vuole che $y=mx+q$ sia tangente in due punti $x_1\neq x_2$ alla curva, $x_1\neq 0$ $x_2\neq 0$, ovvero, essendo $f'=2x+1-2\frac{x}{|x|}$

$$\begin{cases} f'(x_1)=2x_1+1-2\frac{x_1}{|x_1|}=2x_2+1-2\frac{x_2}{|x_2|}=f'(x_2)=m \\ f(x_1)=x_1^2+x_1-2|x_1|=m\cdot x_1+q \\ f(x_2)=x_2^2+x_2-2|x_2|=m\,x_2+q \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^2+x_1-2|x_1|=\left(2x_1+1-2\frac{x_1}{|x_1|}\right)x_1+q \\ x_2^2+x_2-2|x_2|=\left(2x_2+1-2\frac{x_2}{|x_2|}\right)x_2+q \\ 2x_1-2\frac{x_1}{|x_1|}=2x_2-2\frac{x_2}{|x_2|} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^2+\cancel{x_1}-\cancel{2|x_1|}-2x_1^2-\cancel{x_1}+\cancel{2|x_1|}=x_2^2+\cancel{x_2}-\cancel{2|x_2|}-2x_2^2-\cancel{x_2}+\cancel{2|x_2|} \\ 2x_1-2\frac{x_1}{|x_1|}=2x_2-2\frac{x_2}{|x_2|}=m-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2^2-x_1^2=(x_2-x_1)(x_2+x_1)=0 \\ 2x_1-2\frac{x_1}{|x_1|}=2x_2-2\frac{x_2}{|x_2|} \end{cases} \Rightarrow \cancel{\begin{cases} x_1=x_2 \\ \text{--} \end{cases}}\quad \begin{cases} x_2=-x_1 \\ 2x_1-2\frac{x_1}{|x_1|}=-2x_1+2\frac{x_1}{|x_1|} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2=-x_1 \\ 4x_1=4\frac{x_1}{|x_1|} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=-1 \\ x_1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y_2=(-1)^2-1-2=-2 \\ y_1=1^2+1-2=0 \end{array}$$

Dunque la retta che cerchiamo è quella che passa per $(-1,-2)$ e $(1,0)$, ovvero $y=x-1$

Calcolate l'integrale generalizzato $\int_0^{1/2} x^{-5}\, e^{-1/x^2}\, dx$.

$$\int_0^{1/2} x^{-5} e^{-1/x^2} dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{x^2} e^{-1/x^2} \cdot \frac{dx}{x^3} = \int_{+\infty}^{4} y \cdot e^{-y} \cdot -\frac{dy}{2} = (*)$$

$y = \frac{1}{x^2}$

$dy = -\frac{2}{x^3} dx$

$$= \frac{1}{2}\int_4^{+\infty} y e^{-y} dy = \frac{1}{2}\left\{ \left[-y e^{-y}\right]_4^{+\infty} - \int_4^{+\infty} -e^{-y} dy \right\} = \frac{1}{2}\left\{ 4e^{-4} + \left[-e^{-y}\right]_4^{+\infty} \right\}$$

$$= 2e^{-4} + \frac{e^{-4}}{2} = \frac{5}{2e^4}$$

$(*)$ $\frac{1}{2}\int_4^{+\infty} y e^{-y^2} dy$ converge in quanto

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{y e^{-y^2}}{1/y^2} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^3}{e^{y^2}} \overset{z=y^2}{=} \lim_{z\to+\infty} \frac{z^{3/2}}{e^z} \overset{(H)}{=} \lim_{z\to+\infty} \frac{\frac{3}{2} z^{1/2}}{e^z} =$$

$$\overset{H}{=} \lim_{z\to+\infty} \frac{\frac{3}{4} z^{-1/2}}{e^z} = 0$$

$$\Rightarrow \exists \beta > 0 : \forall x > \beta \quad y e^{-y^2} \le 1/y^2 \quad e \quad \int_\beta^{+\infty} \frac{dy}{y^2} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \int_\beta^{+\infty} y e^{-y^2} dy \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \int_4^{+\infty} y e^{-y^2} dy = \int_4^{\beta} y e^{-y^2} + \int_\beta^{+\infty} y e^{-y^2} \in \mathbb{R}$$

oppure

$$\int x^{-5} e^{-1/x^2} = \int \frac{1}{x^2} \cdot e^{-1/x^2} \frac{dx}{x^3}$$

$y = -\frac{1}{x^2}$

$dy = +\frac{2}{x^3} dx$

$$= \left(\int -y\, e^{y} \frac{dy}{2}\right)\Bigg|_{y=-\frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{2}\left(\int y e^y dy\right)\Bigg|_{y=-1/x^2} = -\frac{1}{2}\left\{ y e^y - \int e^y dy \right\}\Bigg|_{y=-1/x^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x^2} e^{-1/x^2} - e^{-1/x^2}\right) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

e dunque $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{e^{-1/x^2}}{x^5} dx = \left[\frac{1}{2x^2} e^{-1/x^2} + \frac{e^{-1/x^2}}{2}\right]_0^{1/2} = 2e^{-4} + \frac{e^{-4}}{2}$

$$= \frac{5}{2e^4}$$

verifica

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(+\frac{1}{x^2}e^{-1/x^2}+e^{-1/x^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\cancel{-\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}}+\frac{1}{x^2}\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}\cancel{+\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}}\right)$$

$$=\frac{e^{-1/x^2}}{x^5} \qquad \text{Verificato}$$

Considerate la funzione $f(x)=\cos(\operatorname{sen} x)-\cos x$.

a) Determinate l'ordine di infinitesimo e la parte principale di f per $x\to 0$.

b) Posto $a_n = f(1/n)$, calcolate $\lim_{n\to+\infty}(n^\alpha a_n)$ al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$.

c) Determinate al variare di $\beta\in\mathbb{R}$ il carattere della serie $\sum_n(n^\beta a_n)$.

$$\cos t = 1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}+o(t^5) \qquad \operatorname{sen} x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$$

$$\cos(\operatorname{sen} x) = 1-\frac{1}{2}\left[x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right]^2+\frac{1}{24}\left[\cdots\right]^4+o\left([x+o(x)]^5\right)$$

$$=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)$$

$$=1-\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+o(x^5)$$

$$f=\cos(\operatorname{sen} x)-\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^5)$$

$$=\frac{x^4}{6}+o(x^5)$$

$$\text{ordine}(f)=4 \qquad \text{p.p.}(f)=\frac{x^4}{6}$$

ii) $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{6n^4}+o\left(\frac{1}{n^5}\right)$

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha\cdot f(1/n) = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{6n^{4-\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^{5-\alpha}}\right)\right]=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{6n^{4-\alpha}}$$

$$=\begin{cases}0 & \text{se } 4-\alpha>0\\ 6 & \text{se } 4=\alpha\\ +\infty & \text{se } 4-\alpha<0\end{cases} = \begin{cases}0 & \text{se } 4>\alpha\\ 6 & \text{se } 4=\alpha\\ +\infty & \text{se } 4<\alpha\end{cases}$$

iii) la serie $\sum_n n^\beta\cdot a_n$ ha lo stesso carattere di

$$\sum_n \frac{1}{6n^{4-\beta}} \qquad \left(\text{poiché } \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{6n^4}}=1\right) \text{ per il}$$

Teorema del confronto asintotico

$\sum_n \left(\frac{1}{n}\right)^{4-\beta}$ converge se $4-\beta>1$ se $3>\beta$

" diverge se $4-\beta\leq 1$ se $3\leq\beta$

e dunque $\sum_n n^\beta a_n$ $\begin{cases} \text{converge se } 3>\beta \\ \text{diverge se } 3\leq\beta \end{cases}$