Analisi Matematica 1

Prima prova in itinere del 10 novembre 2015 per l'esonero dalla prova a quiz

CORREZIONE

(1) Se $z = \dfrac{1}{2-\mathrm{i}}$ e $w = \dfrac{5\bar{z}^2 + \mathrm{i}z}{\Re z + \Im z}$, allora

(A) $\Re w = 2/3$.

(B) $\Im w = 0$.

(C) $\overline{w} = -\mathrm{i}w$.

(D) $w = \frac{2}{5}(2-\mathrm{i})$.

$$z = \frac{1}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$$

$$w = \frac{5\cdot\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i\right)^2 + i\left(\frac{2}{5} + \frac{i}{5}\right)}{\frac{2}{5} + \frac{1}{5}} = \frac{5}{3}\left\{5\left(\frac{4}{25} - \frac{1}{25} - \frac{4}{25}i\right) + \frac{2}{5}i - \frac{1}{5}\right\}$$

$$= \frac{5}{3}\left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i + \frac{2}{5}i - \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}i$$

(A) è vera : $\Re e\, w = 2/3$

(B) è falsa : $\Im m\, w = -\frac{2}{3} \neq 0$

(C) " " : $\overline{\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}i\right)} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}i \neq -i\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}i\right) = -\frac{2}{3}i - \frac{2}{3}$

(D) è falsa : $w = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}i \neq \frac{2}{5}(2-i)$

(2) Sia S l'insieme delle soluzioni della disequazione $\sqrt{2x+1} > x - 7$. Allora:

(A) $\sup S = 12$.

(B) $S \subset [0,4]$.

(C) $S = \{x \in \mathbb{R} : |4x - 23| < 5^2\}$.

(D) S non è limitato inferiormente.

La disequazione equivale a

$$\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x-7 < 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x-7 \geq 0 \\ 2x+1 > x^2+49-14x \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x < 7 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \geq -7 \\ x^2 - 16x + 48 = (x-12)(x-4) < 0 \end{cases} \iff$$

$$x \in \left[-\tfrac{1}{2}, 7\right[\quad \text{o} \quad \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 4 < x < 12 \end{cases} \iff$$

$$x \in \left[-\tfrac{1}{2}, 12\right[= S$$

(A) è vera : $\sup S = 12$

(B) è falsa : $[-\frac{1}{2}, 12[\not\subseteq [0,4]$

(C) è falsa : $|4x-23| < 25 \iff -25 < 4x-23 < 25$

$$\iff -2 < 4x < 48$$

$$\iff -\frac{1}{2} < x < 12 \iff x \in]-\frac{1}{2}, 12[$$

ma $S \neq]-\frac{1}{2}, 12[$

(D) è falsa : $\inf S = \min S = -\frac{1}{2} > -\infty$

(3) Sia $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \log(x^2 - 5x + 6) \leq \log 6\}$. Allora:

(A) $]3, 5[\subset S$.

(B) $[0, 2] \subset S$.

(C) $]4, 6[\subset S$.

(D) S è un intervallo.

La disequazione è soddisfatta se, e soltanto se,

$$\begin{cases} x^2-5x+6 > 0 \\ x^2-5x+6 \leq 6 \end{cases} \iff \begin{cases} (x-3)(x-2) > 0 \\ x(x-5) \leq 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x \in]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[\\ x \in [0,5] \end{cases} \iff x \in [0,2[\cup]3,5] = S$$

(A) è vera

(B) è falsa : $[0,2] \not\subseteq [0,2[\cup]3,5] = S$

(C) è falsa : $]4,6[\not\subseteq [0,2[\cup]3,5] = S$

(D) è falsa : S non è un intervallo poiché $1, 4 \in S$ ma $\frac{5}{2} \notin S$

(4) L'equazione $\overline{z}^3 = -2z$

(A) ha solo 3 soluzioni in $\mathbb{C}$.

(B) è verificata da $z = \sqrt{2}\,\mathrm{i}$.

(C) è verificata da $z = \mathrm{i} - 1$.

(D) non ha soluzioni reali.

L'equazione è soddisfatta da $\boxed{z=0}$, e passando ai moduli $|z|^3 = 2|z| \Rightarrow |z|^2 = 2$

$$\overline{z}^3 = -2z \Rightarrow \overline{z}^4 = -2z\overline{z} = -2|z|^2 \Rightarrow \overline{z}^4 = -4$$

$$\Rightarrow \overline{z}_0 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = 1 + i$$

$$z_1 = -1 + i$$

$$z_2 = -1 - i$$

$$z_3 = 1 - i$$

(A) è falsa : ho trovato 4 soluzioni

(B) è falsa: $-\sqrt{2}i$ NON è soluzione

(C) è vera: $z_1=-1+i$ è soluzione

(D) è falsa: $z=0$ è soluzione

(5) Da un mazzo di 40 carte (contente 4 assi, 4 due, ..., 4 donne, 4 re) vengono pescate 5 carte. Qual è la probabilità che siano due assi, due donne ed un re?

(A) $\frac{2}{40\cdot 39}\cdot\frac{2}{38\cdot 37}\cdot\frac{1}{36}$.

(B) $\frac{6\cdot 6\cdot 1\cdot 35!}{40!}$.

(C) $\frac{4}{13\cdot 38\cdot 37}$.

(D) $\frac{\binom{40}{2}\binom{38}{2}\binom{36}{1}}{\binom{40}{5}}$.

Casi Possibili $= \binom{40}{5}$ ovvero tutti i modi in cui pesco 5 carte

CASI Favorevoli = posso pescare 2 Assi in $\binom{4}{2}$ modi

" " 2 donne in $\binom{4}{2}$ "

" " 1 re in $\binom{4}{1}$ "

e quindi

Probabilità evento $= \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{1}}{\binom{40}{5}} = \frac{(\cancel{6}\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{4})\cdot 5!}{\cancel{40}\cdot 39\cdot 38\cdot 37\cdot\cancel{36}}$

$= \frac{\cancel{5}\cdot 4\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}{\cancel{10}\cdot\cancel{39}\cdot 38\cdot 37} = \frac{4}{13\cdot 38\cdot 37}$

e quindi la risposta corretta è la (C)

(6) L'equazione $z^3-4iz^2+(2i-4)z=0$

(A) ha soluzione $z=-1+3i$.

(B) ha soluzione $z=-1-i$.

(C) non ha soluzioni reali.

(D) ha una sola soluzione in $\mathbb{C}$.

$z=0$ è soluzione: semplificando si trova $z^2-4iz+(2i-4)=0$ che ha come soluzioni

$z_{2,3} = 2i+\sqrt{\cancel{-4}-2i+\cancel{4}} = 2i+\sqrt{2}\,i\,\sqrt{i}$

ma $\sqrt{i} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right\}$

$$z_2 = 2i + \sqrt{2}i\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = 2i + i - 1 = 3i - 1$$

$$z_3 = 2i - \sqrt{2}i\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = 2i - i + 1 = 1 + i$$

e dunque la soluzione corretta è la (A)

(7) Il coefficiente del monomio a^4b^7 nello sviluppo binomiale di $(a-b)^{11}$ vale:

(A) $\binom{11}{4}$.

(B) $\frac{11!}{7!}$.

(C) nessuna delle altre risposte è vera.

(D) -330 .

$$(a-b)^{11} = \sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k} a^{11-k} (-b)^k$$

$$= \binom{11}{0} a^{11} + \dots + \binom{11}{7} \cdot a^4 (-b)^7 + \dots + \binom{11}{11} a^0 (-b)^{11}$$

e dunque il coefficiente cercato è

$$-\binom{11}{7} = -\frac{11 \cdot 10 \cdot \cancel{9}^{3} \cdot \cancel{8}^{1}}{\cancel{4}_1 \cdot \cancel{3}_1 \cdot \cancel{2}_1} = -330$$

e dunque la risposta corretta è la (D)