Analisi Matematica 1 - Ingegneria Gestionale

Seconda prova in itinere del 17 dicembre 2015 valida per l'esonero dalla prova a quiz

CORREZIONE

(1) Sia data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che ha in x_0 un punto di massimo locale. Quale tra i seguenti potrebbe essere un suo sviluppo di Taylor per $x \to 0$?

(A) $f(x) = 10 + \frac{2}{3}x^4 - 4x^5 + o(x^5)$.

(B) $f(x) = -\frac{2}{5}x^3 + x^4 + o(x^4)$.

(C) $f(x) = -x + \frac{7}{4}x^2 - 4x^5 + o(x^5)$.

(D) $f(x) = -10 - \frac{2}{3}x^4 + 2x^5 + o(x^5)$.

Quando $f(x) = P_m(x) + o((x-x_0)^m)$ per $x \to x_0$ si ha che

$\bar{x}$ punto di minimo per $P_m(x) \iff \bar{x}$ punto di minimo per $f(x)$

" " " massimo " " $\iff$ " " " massimo " "

$\bar{x}$ non è p.to di max/min per $P_m(x) \iff \bar{x}$ non è p.to di max/min per $f(x)$

(D) è vera: $x_0=0$ è punto di minimo per $P_5(x) = -10 - \frac{2}{3}x^4 + 2x^5$ e dunque $P_5(x) + o(x^5)$ può essere lo sviluppo di $f(x)$

Possiamo provarlo anche come segue

$f(x) + 10 = -\frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$ per $x \to 0 \iff \frac{f(x)+10}{x^4} = -\frac{2}{3} + o(1)$ per $x \to 0$

da cui segue che, essendo $o(1) \to 0$ per $x \to 0$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : -\delta < x < \delta \Rightarrow -\varepsilon < o(1) < \varepsilon$

$\Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{3}\ \exists \delta > 0 : -\delta < x < \delta \quad -\frac{1}{3} < o(1) < \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \exists \delta > 0 : \frac{f(x)+10}{x^4} < -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \qquad \forall x \in]-\delta, \delta[\setminus \{0\}$

ovvero $x=0$ è p.to di massimo per f

(B) è falsa: $-\frac{2}{5}x^3 + x_4 = P_4(x)$ non ha max/min in $x_0=0$

(C) è falsa: $-x + \frac{7}{4}x^2 - 4x^5 = P_5(x)$ non ha max/min in $x_0=0$

(A) è falsa: $10 + \frac{2}{3}x^4 - 4x^5 = P_5(x)$ ha un punto di minimo in $x_0=0$

(2) Sia $f(x) = \begin{cases} a \log x + b\,e^x - e^{-1} & \text{se } x \geq 1 \\ b \operatorname{sen}(\pi x) + a\,x^2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Allora f è derivabile su tutto $\mathbb{R}$

(A) se $b = \frac{a}{\pi + e}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

(B) se $a = \frac{e - \pi}{\pi e}$ e $b = \frac{1}{\pi e}$.

(C) se $b = \frac{a + e^{-1}}{e}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

(D) se $a = -\frac{1 + \pi e^{-1}}{\pi}$ e $b = -(\pi e)^{-1}$.

La funzione è derivabile con continuità $\forall x \neq 1$ comunque si prendano a e b. Per ogni $x \neq 1$ $\quad f'(x) = \begin{cases} \frac{a}{x} + be^x & , \text{se } x > 1 \\ b\pi\cos(\pi x) + 2ax, & \text{se } x < 1 \end{cases}$

Affinché f sia derivabile in $x=1$ è necessario che

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} f'(x)$, ovvero

$a\log 1 + be - 1/e = b\,\mathrm{sen}\,\pi + a$ e $a + b\cdot e = b\pi\cos\pi + 2a$

da cui $\begin{cases} be = a + \frac{1}{e} \\ be + b\pi = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} be = a + \frac{1}{e} \\ \cancel{a} + \frac{1}{e} + b\pi = \cancel{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{\pi} = a + \frac{1}{e} \\ b = -\frac{1}{\pi e} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{\pi + e}{\pi e} = -\frac{1+\pi e^{-1}}{\pi} \\ b = -\frac{1}{\pi e} \end{cases}$

e dunque la risposta corretta è la (D).

(3) Sia data $a_n = \left|\frac{3\alpha - 1}{\alpha - 3}\right|^n$, e sia $A = \{\alpha \in \mathbb{R} : \sum_n a_n \text{ converge}\}$. Quale tra le seguenti risposte è vera?

(A) A non è limitato.

(B) $A = \{\alpha \in \mathbb{R} : |\alpha| \leq 1\}$.

(C) $]-1, 0[\subseteq A$.

(D) $]0, 2[= A$.

La serie $\sum_n a_n$ è una serie geometrica di ragione $\left|\frac{3\alpha-1}{\alpha-3}\right|$, che converge

se $-1 < \frac{3\alpha-1}{\alpha-3} < 1$ se $\begin{cases} \frac{3\alpha-1}{\alpha-3} + 1 > 0 \\ \frac{3\alpha-1}{\alpha-3} - 1 < 0 \end{cases}$ se $\begin{cases} \frac{3\alpha-1+\alpha-3}{\alpha-3} > 0 \\ \frac{3\alpha-1-\alpha+3}{\alpha-3} < 0 \end{cases}$ se $\begin{cases} \frac{4\alpha-4}{\alpha-3} > 0 \\ \frac{2\alpha+2}{\alpha-3} < 0 \end{cases}$

se $\begin{cases} \alpha \in]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[\\ \alpha \in]-1, 3[\end{cases}$ se $\alpha \in]-1, 1[$

Dunque $A = \{\alpha \in \mathbb{R} : -1 < \alpha < 1\}$ e la risposta corretta è la (C)

(4) Sia data $a_n = \frac{n}{\ln(n)}\left(\sqrt[n]{n^3} - \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)$. Quando $n \to +\infty$ a_n tende a

(A) $3/\mathrm{e}$.

(B) 4.

(C) 0.

(D) $+\infty$.

$$a_n = \frac{n}{\ln(n)} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \left(\sqrt[n]{n^4} - 1\right) = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{n}{\ln(n)} \cdot \frac{e^{\frac{4}{n}\ln(n)} - 1}{\frac{4}{n}\ln(n)} \cdot 4 \cdot \frac{\ln(n)}{n} =$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{e^{4\cdot\frac{n}{\ln(n)}} - 1}{4\cdot\frac{n}{\ln(n)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4$$

poichè $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} \longrightarrow 0$

$\lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$

Ne segue che la risposta corretta è la (B)

(5) La funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ha sviluppo di Taylor centrato in $x_0=0$ di ordine tre $f(x)=x+\frac{3}{2}x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)$. Quale tra le seguenti può essere f?

(A) $f(x)=e^x\ln(1+x^2)$.

(B) $f(x)=e^{x^2}\ln(1+2x)$.

(C) $f(x)=e^{2x}\ln(1+x)$.

(D) $f(x)=e^{x^2}\ln(1+x)$.

$$e^{2x}=1+2x+\frac{1}{2}(2x)^2+\frac{1}{6}(2x)^3+o(x^3)=1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3) \quad \text{per } x\to 0$$

$$e^{2x}\cdot\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+2x^2-x^3+2x^3+o(x^3)$$
$$=x+\frac{3}{2}x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3) \quad \text{per } x\to 0,$$ e dunque

la risposta corretta è la (C).

(6) Se $\alpha\in\mathbb{R}$ è un parametro reale, la serie $\sum_n n^{-\alpha}(\log(1+n^3)-3\log n)$

(A) è indeterminata per qualche valore di α.

(B) converge per ogni $\alpha>-2$.

(C) converge se e solo se $\alpha>1$.

(D) diverge positivamente se $\alpha\le 0$.

$$a_n=\frac{1}{n^\alpha}\cdot\left(\log(1+n^3)-\log(n^3)\right)=\frac{1}{n^\alpha}\cdot\log\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$$

ma $\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y}=1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{1/n^3}=1$

e dunque $a_n\sim\frac{1}{n^\alpha}\cdot\frac{1}{n^3}=\frac{1}{n^{3+\alpha}}$ per $n\to+\infty$

Ma $\sum_n\frac{1}{n^{3+\alpha}}$ converge se $\alpha+3>1$ se $\alpha>-2$

e dunque, per il criterio del confronto asintotico,
$\sum_n a_n$ converge se $\alpha>-2$

Ne segue che la risposta corretta è la (B)

(7) Il limite $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x^3+1)\,\mathrm{sen}(5/x)}{x^{-1}\log(3x)}$ vale

(A) 15.

(B) $+\infty$.

(C) $5/3$.

(D) 0.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+x^3)}{\log(x^3)}\cdot\log(x^3)\cdot\frac{\mathrm{sen}\,5/x}{5/x}\cdot\frac{5}{x}\cdot x\,\frac{\log x}{\log 3+\log x}\cdot\frac{1}{\log x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+x^3)}{\log x^3}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{sen}\,5/x}{5/x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{\log 3+\log x}\cdot\lim_{x\to+\infty}3\cancel{\log x}\cdot\frac{5}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{\log x}}$$

$$=1\cdot1\cdot1\cdot15=15$$