Analisi Matematica 1

Prova scritta del 21 settembre 2015

CORREZIONE

Prima Parte: Quiz a risposta chiusa

Esercizio 1. Sia S l'insieme delle soluzioni della disequazione $2\log(4-2x) \le \log(x^2-2x+8)$. Allora

(A) $]2/3,2[\subset S$.

(B) S non è limitato inferiormente.

(C) $0 \in S$.

(D) $]1,3[\subset S$.

Come prima cosa calcoliamo per quali x ha senso la disequazione: è necessario che sia soddisfatto il sistema $\begin{cases} 4-2x>0 \\ x^2-2x+8>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2>x \\ (x-1)^2+7>0 \end{cases} \Rightarrow x\in\,]-\infty,2[$

Adesso, osservando che $2\log y=\log y^2$ e che $\log x$ è strettamente crescente

$$\begin{cases} 2\log(4-2x)\le\log(x^2-2x+8) \\ x<2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \log(4-2x)^2 \le \log(x^2-2x+8) \\ x<2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 16+4x^2-16x \le x^2-2x+8 \\ x<2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x^2-14x+8\le 0 \\ x<2 \end{cases}$$

Adesso $3x^2-14x+8=0$ ha radici $x_{1,2} = \dfrac{7\pm\sqrt{49-24}}{3} \begin{array}{l} 4 \\ 2/3 \end{array}$

e solo la radice $x=2/3$ è accettabile. Ne segue che la disuguaglianza è soddisfatta per $x\in[2/3,2[$ e dunque la risposta corretta è la (A)

Esercizio 3. Se $I=\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} x^3 e^{-x^4}\,dx$, allora

(A) $I=$ ~~…~~ $1/4e$

(B) $I=1/4$.

(C) $I=+\infty$.

(D) I è un numero negativo.

Una primitiva di $x^3e^{-x^4} = -\frac{1}{4}\left(-4x^3e^{-x^4}\right)$ è $\boxed{-\frac{1}{4}e^{-x^4}}$

e dunque $I=\lim_{\beta\to+\infty}\left[-\frac{1}{4}e^{-x^4}\right]_{-1}^{\beta} = \lim_{\beta\to+\infty} -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{e^{\beta^4}} + \frac{1}{4e} = \frac{1}{4e}$

ovvero la risposta corretta è la (A)

Esercizio 5. Sia $F(x)$ la primitiva della funzione $f(x) = 2x \arctan x$ tale che $F(1) = \pi/2$. Allora

(A) $F(x) = 1 - x + (x^2 + 1)\arctan x$.

(B) $F(x) = 2\arctan x + \dfrac{2x}{1+x^2} - 1$.

(C) $F(x) = x^2 \arctan x$.

(D) $\displaystyle\int_0^1 F(x)\,dx = f(1) - f(0)$.

Calcoliamo $F(x) = \int 2x \operatorname{arctg}(x)\,dx = x^2 \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

$$= x^2 \operatorname{arctg} x - \int \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right) dx$$

$$= x^2 \operatorname{arctg} x - x + \operatorname{arctg} x + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Imponendo $F(1) = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi}{4} + c = \pi/2 \Rightarrow c = 1$

Esercizio 7. L'equazione $3z^3 - z^2 + 3z - 1 = 0$, $z \in \mathbb{C}$,

(A) ha $z = -\mathrm{i}$ come radice.

(B) non ha radici reali.

(C) ha solo radici reali.

(D) possiede l'unica radice complessa $z = \mathrm{i}$.

Osservando che

$$3z^3 - z^2 + 3z - 1 = z^2(3z-1) + (3z-1) = (z^2+1)(3z-1)$$

si conclude che le radici sono $z_1 = i$, $z_2 = -i$, $z_3 = 1/3$

e dunque

(A) è vera (B) è falso: $1/3$ è radice (C) è falsa: l'equazione ha 2 radici in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (D) è falsa: l'eq. ha 3 radici distinte

Esercizio 9. Sia $f(x) = x - 2x^3 + x^5$, e sia $P_3(x)$ il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato in $x_0 = 1$. Quale tra le seguenti risposte è vera?

(A) $P(x) = 4(x-1)^2 + 8(x-1)^3$.

(B) $P(x) = x - 2x^3$.

(C) $P(x) = 2(x-1) + 8(x-1)^2 + 10(x-1)^3$.

(D) $P(x) = (x-1) - 2(x-1)^3$.

Si tratta di calcolare

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k = \frac{8}{2!}(x-1)^2 + \frac{48}{3!}(x-1)^3 = 4(x-1)^2 + 8(x-1)^3$$

$f(1) = 0$

$f'(x) = 1 - 6x^2 + 5x^4 \Rightarrow f'(1) = 0$

$f''(x) = -12x + 20x^3 \Rightarrow f''(1) = 8$

$f'''(x) = -12 + 60x^2 \Rightarrow f'''(1) = 48$

Dunque la risposta corretta è la (A)

Esercizio 11. Il limite $\lim_{x\to 0} \frac{\log(3\cos x + 2(\operatorname{sen} x - 1)) - 2x}{x^2}$ vale

(A) $-7/2$.
(B) $-3/2$.
(C) $-\infty$.
(D) 0.

Utilizzando gli sviluppi di Taylor si ha

$$\log(3\cos x + 2(\operatorname{sen} x - 1)) - 2x = \log\left(3\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) + 2\left(x - \frac{x^3}{6} - 1 + o(x^3)\right)\right) - 2x$$

$$= \log\left(1 + 2x - 3x^2 + o(x^2)\right) - 2x$$

$$= \left[\cancel{2x} - 3x^2 + o(x^2) - \frac{1}{2}\left(x - 3x^2 + o(x^2)\right)^2\right] - \cancel{2x}$$

$$= -3x^2 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) = -\frac{7}{2}x^2$$ e dunque

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(3\cos x + 2(\operatorname{sen} x - 1)) - 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{7}{2}x^2}{x^2} = -\frac{7}{2}$$

e la risposta corretta è la (A)

Esercizio 13. I valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali a serie $\sum_n \frac{e^{1/n} - 1}{n^\alpha + n^{-2\alpha}}$ converge sono

(A) $\alpha \neq 0$.
(B) $\alpha > -1$.
(C) $\alpha < 1$.
(D) solo $\alpha = 0$.

Osserviamo che $e^{1/n} - 1 \sim 1/n$ per $n \to +\infty$, e quindi

$$a_n = \frac{e^{1/n} - 1}{n^{3\alpha} + 1} \cdot n^{2\alpha} \sim \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha+1}} \quad \text{per } \alpha > 0,$$

che è convergente $\forall \alpha$

$$a_n = \frac{n^{2\alpha}}{n^{3\alpha} + 1} \cdot (e^{1/n} - 1) \sim \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{-2\alpha} = \frac{1}{n^{1-2\alpha}} \quad \text{per } \alpha < 0$$

che è convergente $\forall \alpha < 0$

Nel caso $\alpha = 0$ $a_n = \frac{1}{2}(e^{1/n} - 1) \sim 1/n$ che è divergente. Ne segue che (A) è vera e le altre risposte sono false

Esercizio 1: determinate tutte le soluzioni $z, w \in \mathbb{C}$ del sistema

$$\begin{cases} 2z^2 - w = 1 \\ z \cdot w = 1 \end{cases}$$

$\begin{cases} 2z^2 - w = 1 \\ zw = 1 \end{cases}$ Ovviamente $z, w \neq 0$, da cui si ottiene $\begin{cases} 2z^2 - 1/z = 1 \\ w = 1/z \end{cases}$

debbo risolvere

$2z^3 - z - 1 = 0$

Cercando tra i divisori di 1 si trova che $z = 1$ è soluzione: $2 \cdot 1^3 - 1 - 1 = 0$!

Dunque

$$\begin{array}{llll|l} 2z^3 & 0 & -z & -1 & z-1 \\ \cline{5-5} 2z^3 & -2z^2 & & & 2z^2+2z+1 \\ \cline{1-4} // & 2z^2 & -z & -1 & \\ & 2z^2 & -2z & & \\ \cline{2-4} & // & z & -1 & \end{array}$$

dunque $2z^3 - z - 1 = (z-1)(2z^2 + 2z + 1) = (z-1)\left(z + \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)$

poiché $2z^2 + 2z + 1 = 0$ se $\frac{-1 \pm \sqrt{1-2}}{2} = z_{2,3}$

se $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$

$z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$

Dunque $z = 1 \longrightarrow w_1 = 1$

$z_2 = -\frac{1}{2}(1+i) \longrightarrow w_2 = -\frac{2\,(1-i)}{(1+i)(1-i)} = -1 + i$

$z_3 = -\frac{1}{2}(1-i) \longrightarrow w_3 = -\frac{2\,(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -1 - i$

2) Sia $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 14x - 5$.

a) Determinate il limite di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$. Deducete poi se f ha massimo o minimo.

b) Trovate gli intervalli di monotonia di f e i suoi due punti critici (o stazionari), determinandone la loro natura.

c) Trovate gli intervalli di convessità e concavità di f ed i suoi due punti di flesso.

d) Trovate l'equazione della retta tangente il grafico di f in corrispondenza del punto di flesso a tangente orizzontale.

e) Determinate il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$. Trovate tali soluzioni e studiate il segno di f.

Il dominio di f, che è un polinomio, è tutto $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^4\left(1+\frac{2}{x}-\frac{12}{x^2}+\frac{14}{x^3}-5\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x^4 = +\infty$$

Osserviamo che, per il Corollario al Teorema di Weierstrass, essendo f continua $\exists x_m \in \mathbb{R} : f(x_m) = \min f(\mathbb{R})$

INTERVALLI DI MONOTONIA

$f'(x) = 4x^3+6x^2-24x+14$. Cerchiamo le radici intere tra i divisori di 14, ovvero $\pm 1 \pm 2 \pm 7 \pm 14$ e si trova $f'(1)=0$

$$\begin{array}{l|l} 4x^3+6x^2-24x+14 & x-1 \\ \hline 4x^3-4x^2 & 4x^2+10x-14 \\ \hline // \quad 10x^2-24x+14 & \\ \quad 10x^2-10x & \\ \hline // \quad -14x+14 & \end{array}$$

dunque $f'(x)=(x-1)(4x^2+10x-14)$

$\begin{array}{r} 14 \\ 4 \\ \hline 56 \end{array}$

Adesso $4x^2+10x-14 = (2x^2+5x-7)\cdot 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-5\pm\sqrt{25+56}}{4}$

$\Leftrightarrow x_1 = -7/2$

$x_2 = 1$

e quindi $f'(x) = 2(2x+7)(x-1)(x-1)$

e si ha perciò

$$f'\begin{cases} <0 & x<-7/2 \\ >0 & -\frac{7}{2}<x \end{cases} \Rightarrow x=-\frac{7}{2} \text{ p.to di minimo assoluto}$$

Il punto $x=1$ risulta essere di flesso a tangente orizzontale $y=0$ in quanto

$f(1)=f'(1)=f''(1)=0$

CONCAVITÀ/CONVESSITÀ

$f''(x) = 12x^2+12x-24 = 12(x^2+x-2) = 12(x+2)(x-1)$

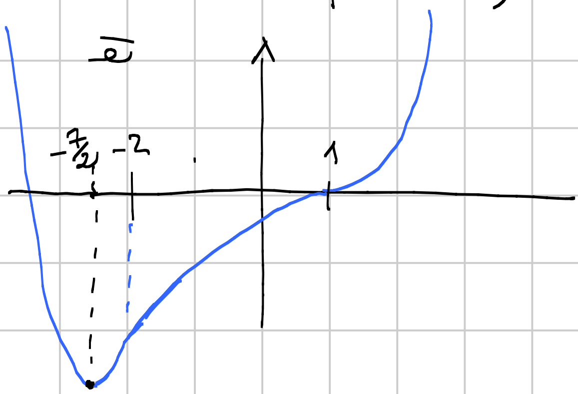
e quindi $x=-2$ e $x=1$ sono due punti di flesso

$x=1$ p.to di flesso con retta tangente $y=0$ $(f(1)=f'(1)=0)$

$x=-2$ " " " " retta tangente $y=-156+54(x+2)$

in quanto $f(-2)=-156$ $f'(2)=54$

Essendo $f(0)=-5$, il grafico approssimativo di f è



NUMERO DI SOLUZIONI DI $f(x)=k$

Una volta tracciato il grafico è semplice osservare che

$k< f\left(-\frac{7}{2}\right) \Rightarrow f(x)=k$ ha $\emptyset$ soluzioni

$k= f\left(-\frac{7}{2}\right) \Rightarrow f(x)=k$ ha $1!$ soluzione $x=-\frac{7}{2}$

$f\left(-\frac{7}{2}\right)<k \Rightarrow$ " " 2 soluzioni

3) Sia $f(x) = \dfrac{1}{1-2x} - e^{2x} - 2\,\mathrm{sen}^2\,x$.

a) Calcolate il polinomio di Taylor centrato in $x_0=0$ e di ordine 4 della funzione $f(x)$.

b) Calcolate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite $l_\alpha = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-\alpha x^3}{x^4}$.

c) Posto $a_n = f(1/n)$, determinate al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ il carattere della serie $\sum_n n^\beta a_n$.

Utilizzando gli sviluppi delle funzioni elementari:

$$\frac{1}{1-2x} = 1+2x+4x^2+8x^3+16x^4+o(x^4)$$

$$e^{2x} = 1+2x+\frac{4x^2}{2}+\frac{8x^3}{6}+\frac{16x^4}{24}+o(x^4)$$
$$= 1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)$$

$$2\,\mathrm{sen}^2 x = 2\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)^2 = 2\left(x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)\right) = 2x^2-\frac{2}{3}x^4+o(x^4)$$

$$f(x) = \cancel{1}+\cancel{2x}+\cancel{4x^2}+8x^3+16x^4-\cancel{1}-\cancel{2x}-\cancel{2x^2}-\frac{4}{3}x^3-\frac{2}{3}x^4$$
$$-\cancel{2x^2}+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)$$
$$= x^3\left(8-\frac{4}{3}\right)+x^4\left(16-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)+o(x^4)$$

$$= \frac{20}{3}x^3+16x^4+o(x^4)$$

b) $$l_\alpha = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\alpha x^3}{x^4} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\left(\frac{20}{3}-\alpha\right)+16+o(1)\right)$$

$$\Rightarrow\ l_\alpha = \begin{cases} -\infty & \alpha > 20/3 \\ 16 & \alpha = 20/3 \\ +\infty & \alpha < 20/30 \end{cases}$$

c) Se $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{20}{3}\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right) \sim \frac{1}{n^3} = b_n$

e quindi studiare la convergenza di $\sum_n n^\beta a_n$ equivale a studiare la convergenza di $\sum_n n^\beta \cdot \frac{1}{n^3} = \sum_n \left(\frac{1}{n}\right)^{3-\beta}$

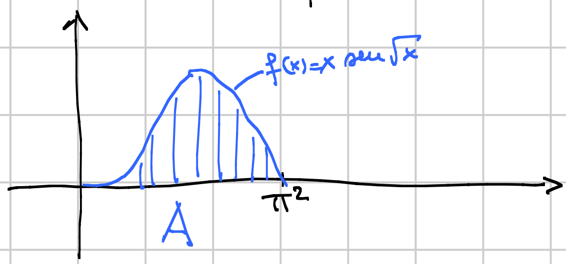
e quest'ultima converge se $3-\beta>1$ se $2>\beta$

ovvero $\sum_n n^\beta a_n$ converge sse $2>\beta$

4) Calcolate l'area dell'insieme

$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid 0\le x\le\pi^2\ ,\ \ 0\le y\le x\,\mathrm{sen}\sqrt{x}\}\ .$$

L'insieme A si può disegnare nel piano xy in modo approssimativo



Si tratta quindi di calcolare $\int_0^{\pi^2} x\,\mathrm{sen}(\sqrt{x})\,dx =$

$$\underset{\substack{\sqrt{x}=t \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}dx=dt}}{=} \int_0^\pi t^2\,\mathrm{sen}\,t\cdot 2t\,dt = 2\left[-t^3\cos t+3t^2\,\mathrm{sen}\,t+6t\cos t-6\,\mathrm{sen}\,t\right]_0^\pi =$$
$$= 2\left(\pi^3-6\pi\right) = 2\pi\left(\pi^2-6\right)$$

$$\int t^3\,\mathrm{sen}\,t\,dt = -t^3\cos t+\int 3t^2\cos t\,dt = -t^3\cos t+3\left\{t^2\,\mathrm{sen}\,t-\int 2t\,\mathrm{sen}\,t\right\}$$
$$= -t^3\cos t+3t^2\,\mathrm{sen}\,t-6\left\{-t\cos t+\int\cos t\,dt\right\}$$
$$= -t^3\cos t+3t^2\,\mathrm{sen}\,t+6t\cos t-6\,\mathrm{sen}\,t+c\quad c\in\mathbb{R}$$