Analisi Matematica 1

Prova scritta del 7 settembre 2015

CORREZIONE

Prima Parte : Quiz a risposta chiusa

(1) La serie $\sum_n n^{3\alpha}(1-\cos(1/n))$

(A) diverge per ogni $\alpha > 0$.

(B) ha somma negativa per qualche valore di α.

(C) converge se e solo se $\alpha < 1/3$.

(D) converge se $\alpha < 2/3$.

Quando $x \to 0$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \Rightarrow_{n\to+\infty} \cos\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$$\Rightarrow a_n = n^{3\alpha}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) = n^{3\alpha}\left(1-1+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2n^{2-3\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{3-3\alpha}}\right) \quad n\to+\infty \qquad \text{quando } 3-3\alpha \geq 0$$

Dunque $a_n \sim \left(\frac{1}{n}\right)^{2-3\alpha}$ $n \to +\infty$,

e $\sum_n \left(\frac{1}{n}\right)^{2-3\alpha}$ converge sse $2-3\alpha > 1$ sse $1 > 3\alpha$ sse $\frac{1}{3} > \alpha$

Ne segue che anche $\sum_n a_n$ converge sse $\frac{1}{3} > \alpha$ e la risposta corretta è la (C).

(2) La retta tangente al grafico di $f(x) = 2|x| - \mathrm{sen}(\pi x)$ nel punto di ascissa 1 ha equazione

(A) $y = (2-\pi)x - \pi$.

(B) $y = 2 + (\pi + 2)x$.

(C) $y = 3x - 1$.

(D) non esiste dato che f non è derivabile.

Preso $x \in]0,+\infty[$ $f(x) = 2x - \mathrm{sen}(\pi x) \Rightarrow f'(x) = 2 - \pi\cos(\pi x)$

e dunque $f(1) = 2$ e $f'(1) = 2+\pi$, dunque la retta tangente è

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) \qquad \Rightarrow \qquad y = (2+\pi)x - \pi$$

$$= 2 + (2+\pi)(x-1)$$

ovvero la risposta corretta è la (A)

(3) Se la successione $\sqrt[n]{3+a_n}$ ha limite 2, allora (a_n) può essere una delle seguenti successioni:

(A) $a_n = 2\frac{\log n}{n}$.

(B) $a_n = e^n - 1$.

(C) $a_n = \frac{2^n}{n}$.

(D) $a_n = 2 - \frac{1}{n}$.

(A) è falsa : $\frac{\log n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow 3 \leq 3 + 2\frac{\log n}{n} \leq 5 \Rightarrow$

e $\frac{\log n}{n} \leq 1$ $\forall n$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{3} \leq \sqrt[n]{3+2\frac{\log n}{n}} \leq \sqrt[n]{5} \Rightarrow 1 = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3} \leq \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3+2\frac{\log n}{n}} \leq \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{5} = 1$$

(B) è falsa : $e = \sqrt[n]{e^n} \leq \sqrt[n]{3+e^n-1} \leq \sqrt[n]{2e^n}$

$$\Rightarrow e \leq \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3+e^n-1} \leq e \cdot \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2} = e$$

(C) è vera : $\frac{2}{\sqrt[n]{n}} \leq \sqrt[n]{3+\frac{2^n}{n}} \leq \sqrt[n]{3+2^n} \leq \sqrt[n]{3\cdot 2^n} = 2\cdot\sqrt[n]{3}$

e quindi $2=\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n}} \le \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3+\frac{2^n}{n}} \le 2\cdot\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3} = 2$

(D) è falsa : $\sqrt[n]{4} \le \sqrt[n]{3+2-1/n} \le \sqrt[n]{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{4} \le \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3+2-\frac{1}{n}} \le \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{5} = 1$

(Si è utilizzato il Teorema dei 2 Carabinieri e alcune disuguaglianze elementari valide $\forall n\geq 1$)

(4) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivabile con derivata continua tale che $f'(-2)=-3$ e $f'(2)=3$. Se $g(x)=f(x)-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}$, allora

(A) $g(x)$ è convessa.
(B) esiste $x_0\in]-2,2[$ tale che $g'(x_0)=-5$.
(C) $g(0)=\max g([-2,2])$.
(D) $g(x)$ è crescente su $[-2,2]$.

$g'(x)=f'(x)-x+x^3$ è continua e $g'(-2)=f'(-2)+2-8$
$=-3-6=-9$

mentre $g'(2)=f'(2)-2+8=3+6=9$

Dunque, per il Teorema dei Valori intermedi, $\forall k\ -9\le k\le 9$ esiste $x_k\in[-2,2]$: $g'(x_k)=k$, e dunque (prendendo $k=-5$!) la (B) è vera

Se ora si considera $f(x)=\frac{3}{32}x^4$, $f'(-2)=-3=-f'(2)$

ma $g(x)=\frac{3}{32}x^4-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}$ NON soddisfa (A), non soddisfa (C) e neppure soddisfa (D).

(5) Un mazzo di 40 carte viene diviso in due mazzetti, uno di 30 e l'altro di 10 carte. Qual è la probabilità che il re e la regina di cuori siano nello stesso mazzetto?

(A) 24/39.
(B) 217/780.
(C) 14/39.
(D) 5/8.

Si pensi ad un mazzo di 38 carte nere e 2 rosse, suddiviso in un mazzetto da 30 ed uno da 10

Casi possibili $\binom{40}{2}=20\times 39$

Casi favorevoli $\binom{30}{2}+\binom{10}{2}=\frac{30\times 29}{2}+\frac{10\cdot 9}{2}=15\times 29+45$

$=435+45=480=24\times 20$

Dunque la probabilità cercata è $\frac{24\times 20}{39\times 20}=\frac{24}{39}$

ovvero la risposta (A) è corretta

(Si osservi che i casi avversi sono 30×10, ovvero $P=\frac{20\times 39-30\times 10}{20\times 39}=\frac{24}{39}$)

(6) Sia $z = \sqrt{3} - i$. Quale tra le seguenti risposte è **vera**?

(A) Nessuna delle altre risposte è vera.
(B) $\Re(z^{29}) = 0$.
(C) $\Im(z^{29}) > 0$.
(D) $z^{29} = \Re(z^{29})$.

$z = \sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$ e passando alla forma polare si ottiene $z = 2\left(\cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{11}{6}\pi\right)\right)$

Dunque utilizzando de Moivre

$$z^{29} = 2^{29}\left(\cos \frac{29 \times 11}{6}\pi + i \operatorname{sen} \frac{29 \times 11}{6}\pi\right)$$

Ma $29 \times 11 = 290 + 29 = 319 \Rightarrow \frac{319}{6}\pi = 52\pi + \frac{7}{6}\pi \Rightarrow$

$$\Rightarrow z^{29} = 2^{29}\left(\cos \frac{7}{6}\pi + i \operatorname{sen} \frac{7}{6}\pi\right) = 2^{29}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$$

e dunque la risposta corretta è la (A)

(7) Se $f'(x) = x^2 - 2\log(x) + (1 + x^2)^{-1}$, allora la funzione $f(x)$ può essere

(A) $\frac{x^3}{3} - 2x\log(x) + 2x + \arctan(x) + 3$.
(B) $2x - \frac{2}{x} - \frac{2x}{(1+x^2)^2}$.
(C) $x^3 - \frac{2}{x} + \arctan(x)$.
(D) nessuna delle altre risposte è vera.

L'unico caso in cui, derivando, compare "$-2\log x$" è la (A), e infatti si verifica

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} - 2x\log x + 2x + \operatorname{arctg} x + 3\right) =$$

$$= x^2 - 2\log x - 2x\frac{1}{x} + 2 + \frac{1}{1+x^2} = x^2 - 2\log x + (1+x^2)^{-1}$$

e quindi la risposta corretta è la (A).

Seconda Parte : esercizi a risposta aperta

1) Scrivete le tre radici cubiche di $8i$.
   a) Detta z_0 quella con parte reale minore, calcolate $(z_0)^6$.
   b) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione $32iw - (z_0)^6\bar{w} = \frac{8}{5}w\bar{w}$.

Passando alla rappresentazione polare,
$t = 8i = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$ e dunque le tre radici (in $\mathbb{C}$) sono

$$2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right)\right) = -2i$$

Adesso $(z_0)^6 = \left[(-\sqrt{3}+i)^3\right]^2 = \left[(\sqrt{3}+i)^3\right]^2 = \left[(2i)^3\right]^2 = (8i)^2 = -64$

e l'equazione in w risulta

$$32iw - (-64)\overline{w} = \frac{8}{5} w\overline{w}$$

e passando alla rappresentazione algebrica $w = a+ib$

$$\cancel{32}^{4} i(a+ib) + \cancel{64}^{8}(a-ib) = \frac{\cancel{8}}{5}(a^2+b^2)$$

$$i20a - 20b + 40a - i40b = a^2+b^2$$

che equivale al sistema reale

$$\begin{cases} 20a - 40b = 0 \\ a^2+b^2+20b-40a=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2b \\ 4b^2+b^2+20b-80b=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a=2b \\ 5b(b-12)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} a=24 \\ b=12 \end{cases}$$

ovvero le soluzioni dell'eq. sono $w_1 = 0$, $w_2 = 24+12i$

2) Data $f(x) = x\dfrac{2\log(x)-3}{\log(x)-2}$, determinatene il dominio, i limiti agli estremi del dominio, gli asintoti, le regioni di monotonia e i punti di massimo e minimo locali. Tracciate un grafico approssimativo di f.
Determinate, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$

DOMINIO $D(f) = \{x : f(x) \in \mathbb{R}\}$

Perché esista $\log x$ deve essere $x > 0$ $\Rightarrow D(f) =]0, e^2[\cup]e^2, +\infty[$

" $\log x - 2 \neq 0$ " " $x \neq e^2$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{2 - 3/\log x}{1 - 2/\log x} = 0^+ \cdot \frac{2 - 3/\infty}{1 - 2/\infty} = 0^+ \cdot 2 = 0^+$$

$$\lim_{x\to e^{2-}} f(x) = \lim_{x\to e^{2-}} x\cdot(2\log x - 3) \cdot \lim_{x\to (e^2)^-} \frac{1}{\log x - 2} = \frac{e^2(4-3)}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to (e^2)^+} f(x) = \ldots = \frac{e^2(4-3)}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{2 - 3/\log x}{1 - 2/\log x} = +\infty \cdot \frac{2 - 3/+\infty}{1 - 2/+\infty}$$

$$= +\infty \cdot \frac{2 - 0^+}{1 - 0^+} = +\infty$$

ASINTOTI

la retta $x = e^2$ è un asintoto verticale

Non esistono asintoti orizzontali

Proviamo che non esistono asintoti obliqui

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2 - 3/\log x}{1 - 2/\log x} = \frac{2 - 3/+\infty}{1 - 2/+\infty} = \frac{2 - 0^+}{1 - 0^+} = 2$$

ma $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{2\log x - 3}{\log x - 2} - 2\right) =$

$$= \lim_{x\to+\infty} x \cdot \frac{\cancel{2\log x} - 3 - \cancel{2\log x} + 4}{\log x - 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\log x - 2} = +\infty$$

e dunque $\nexists$ asintoti obliqui

SEGNO DI $f(x)$

$\begin{cases} f(x) = 0 \\ x \in D(f) \end{cases}$ se $\begin{cases} 2\log x - 3 = 0 \\ x \in D(f) \end{cases}$ se $x = e^{3/2}$

e dunque

$$f(x) \begin{cases} >0 & 0<x<e^{3/2} \\ <0 & e^{3/2}<x<e^2 \\ >0 & e^2<x \end{cases}$$

REGIONI DI MONOTONIA

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x\,\frac{2\log x - 3}{\log x - 2}\right) = \frac{2\log x - 3}{\log x - 2} + x\,\frac{\frac{2}{x}(\log x - 2) - \frac{1}{x}(2\log x - 3)}{(\log x - 2)^2}$$

$$= \frac{(2\log x - 3)(\log x - 2)}{(\log x - 2)^2} + \frac{2\cancel{\log x} - 4 - 2\cancel{\log x} + 3}{(\log x - 2)^2} =$$

$$= \frac{2\log^2 x - 7\log x + 6 - 1}{(\log x - 2)^2} = \frac{(2\log x - 5)(\log x - 1)}{(\log x - 2)^2}$$

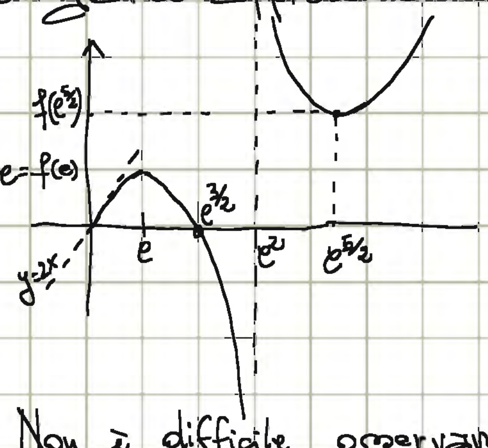
Ne segue $f' = 0$ se $x = e^{5/2}$ o $x = e$, e quindi

$$f' \begin{cases} >0 & 0<x<e \\ <0 & e<x<e^2 \\ <0 & e^2<x<e^{5/2} \\ >0 & e^{5/2}<x \end{cases} \Longrightarrow f \begin{cases} \nearrow & x \in]0,e[\\ \searrow & x \in]e,e^2[\cup]e^2,e^{5/2}[\\ \nearrow & x \in]e^{5/2},+\infty[\end{cases}$$

Ne segue che $x = e$ e $x = e^{5/2}$ sono, rispettivamente, un punto di max ed un punto di minimo locali con $f(e) = e\,\frac{2\log e - 3}{\log e - 2} = e$

$$f(e) = e < f(e^{5/2}) = e^{5/2}\,\frac{2\cdot\log e^{5/2} - 3}{\log e^{5/2} - 2} = e^{5/2}\,\frac{5-3}{\frac{1}{2}} = 4e^{5/2}$$

Un grafico approssimativo di f è



Osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^+} f' = \lim_{x\to 0^+} \frac{(2\log x - 5)(\log x - 1)}{(\log x - 2)^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\log^2 x}{\log^2 x} = 2$$

Non è difficile osservare che

$k \le 0 \Rightarrow$	$f(x) = k$	ha	1	soluzione
$0<k<e \Rightarrow$	"	"	2	"
$e = k \Rightarrow$	"	"	1	"
$e<k<4e^{5/2} \Rightarrow$	"	"	0	"
$k = 4e^{5/2} \Rightarrow$	"	"	1	"
$e^{5/2}<k \Rightarrow$	"	"	2	"

3) Considerate per ogni $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f_a(x)$ definita da

$$f_a(x) = \log(e^{ax} - \operatorname{sen}(ax)) + \cos(ax) - 1 \ .$$

a) Trovate lo sviluppo di Taylor di ordine 4 (centrato in $x_0 = 0$) della funzione $f_a(x)$.
b) **(Solo Analisi 1)** Calcolate al variare di $a \in \mathbb{R}$ il limite

$$l_a = \lim_{x \to 0^+} \frac{f_a(x) - 9x^3}{x^4} \ .$$

Sia $g(y) = \log(e^y - \operatorname{sen} y) + \cos y - 1$. Gli sviluppi in $y=0$ delle f.ni elementari mi danno

$e^y = 1 + y + y^2/2 + y^3/6 + y^4/24 + o(y^4)$

$\operatorname{sen} y = y - y^3/6 + o(y^4)$

$\log z = z - z^2/2 + o(z^2)$

$\cos y = 1 - y^2/2 + y^4/24 + o(y^4)$

$$g(y) = \log\left(1 + \cancel{y} + y^2/2 + y^3/6 + y^4/24 + o(y^4) - \cancel{y} + y^3/6\right) + \cancel{1} - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} - \cancel{1} + o(y^4)$$

$$= \left[\cancel{y^2/2} + y^3/3 + y^4/24 + o(y^4)\right] - \frac{1}{2}\left[y^2/2 + o(y^2)\right]^2 + o\left(\left[y^2 + o(y^2)\right]^2\right) \cancel{- \frac{y^2}{2}} + \frac{y^4}{24} + o(y^4)$$

$$= y^3/3 + y^4/24 - y^4/8 + y^4/24 + o(y^4)$$

$$= y^3/3 - y^4/24 + o(y^4) \qquad y \to 0$$

da cui segue

$$f_\alpha(x) = \frac{\alpha^3 x^3}{3} - \frac{\alpha^4 x^4}{24} + o(x^4) \qquad x \to 0$$

$$l_\alpha = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^4}\left\{\frac{\alpha^3 x^3}{3} - \frac{\alpha^4 x^4}{24} + o(x^4) - 9x^3\right\} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^4}\left\{\left(\frac{\alpha^3}{3} - 9\right)x^3 - \frac{\alpha^4 x^4}{24} + o(x^4)\right\} = \begin{cases} -\infty & \alpha < 3 \\ -\frac{81}{24} = -\frac{27}{8} & \alpha = 3 \\ +\infty & \alpha > 3 \end{cases}$$

4) Sia data la funzione $g(x) = e^{-x^2}(3x^3 + x)$.
a) Trovate la primitiva $G(x)$ di $g(x)$ tale che $G(0) = 1$.
b) Calcolate l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} g(x)\, dx$.
c) **(Solo Analisi 1)** Posto $a_n = \int_n^{+\infty} g(x)\, dx$, determinate il carattere della serie $\sum_n a_n$.

Calcoliamo l'integrale indefinito

$$F(x) = \int g(x)\, dx = \int 3x^3 e^{-x^2} dx + \int x e^{-x^2} dx$$

$$= \int -\frac{3}{2} x^2 \cdot (-2x e^{-x^2}) dx - \frac{1}{2}\int (-2x e^{-x^2}) dx$$

$$= -\frac{3}{2} x^2 e^{-x^2} - \int -3x e^{-x^2} dx - \frac{1}{2} e^{-x^2}$$

$$= -\frac{3}{2}x^2e^{-x^2} - \frac{3}{2}\int -2xe^{-x^2}dx - \frac{1}{2}e^{-x^2}$$

$$= -\frac{3}{2}x^2e^{-x^2} - \frac{3}{2}e^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2} + c$$

$$= -\frac{e^{-x^2}}{2}\left(3x^2+4\right) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Impongo $F(0) = -\frac{1}{2}\cdot 4 + c = 1 \Rightarrow c = 3$ e dunque

$G(x) = -\frac{e^{-x^2}}{2}(3x^2+4) + 3$ è la primitiva cercata

$$\int_0^{+\infty} g(x)dx = \lim_{\beta\to+\infty}\left[-\frac{e^{-x^2}}{2}(3x^2+4)+3\right]_0^{\beta} = \lim_{\beta\to+\infty}\left(-\frac{3\beta^2}{2e^{\beta^2}} - \frac{2}{e^{\beta^2}}\right) + 3 - 1$$

$= 2$ in quanto $\lim_{\beta\to+\infty}\frac{\beta^k}{e^{\beta^2}} = 0 \quad \forall k \geq 0$

Posto

$$a_n = \int_n^{+\infty} g(x)dx = \lim_{\beta\to+\infty} G(\beta) - G(n) =$$

$$= \lim_{\beta\to+\infty}\left[-\frac{3}{2}\frac{\beta^2}{e^{\beta^2}} - \frac{2}{e^{\beta^2}} + 3\right] + \frac{3}{2}\frac{n^2}{e^{n^2}} + \frac{2}{e^{n^2}} - 3$$

$$= \frac{3}{2}\frac{n^2}{e^{n^2}} + \frac{2}{e^{n^2}} \sim \frac{n^2}{e^{n^2}} = b_n \quad n\to+\infty$$

Ma $\sqrt[n]{b_n} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{e^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e^{+\infty}} = 0^+$

e per il Criterio della radice n-esima $\sum_n b_n$ converge; quindi, per il Criterio del confronto asintotico $\sum_n a_n$ converge