Prova scritta di Analisi Matematica 1 - SOLUZIONI
Ingegneria Gestionale - 15 giugno 2015

1ª Parte - Quiz a risposta multipla

(1) Sia $z = 2/(1-\mathrm{i})$. Allora, $w = \dfrac{\bar{z} - \mathrm{i}z}{\bar{z}|z|^2 + \mathrm{i}}$ è uguale a

(A) $w = 2(3-\mathrm{i})/5$.
(B) $w = 2(3+\mathrm{i})/5$.
(C) $w = 2(1-2\mathrm{i})/5$.
(D) $w = 2(2+\mathrm{i})/5$.

$$z = \frac{2}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{\cancel{2}(1+i)}{\cancel{2}_1} \Rightarrow w = \frac{1-i-i(1+i)}{(1-i)\,2+i}$$

$$= \frac{1-i-i+1}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{2(1-i)(2+i)}{5} = \frac{2}{5}\cdot(3-i)$$

Quindi la risposta corretta è la (A)

(2) Per $x \to 0$ la funzione $\dfrac{e^{x^2} + 2\cos x - 3}{x^6/2}$ tende a

(A) $7/6$.
(B) 0.
(C) $+\infty$.
(D) $-7/12$.

Grazie alla formula di Taylor centrata in $x_0 = 0$

$$\frac{e^{x^2} + 2\cos x - 3}{x^6/2} = \frac{1 + x^2 + x^4/2 + 2 - x^2 + x^4/12 - 3 + o(x^4)}{x^6/2}$$

$$= \frac{7/6\, x^4 + o(x^4)}{x^6/2} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$$

e la risposta corretta è la (C)

(3) Una primitiva di $f(x) = x^2 e^{-x^3}$

(A) è $F(x) = 2xe^{-x^3} - 3x^5 e^{-x^3}$.
(B) non è nessuna delle altre.
(C) è $F(x) = -\dfrac{1}{3}e^{-x^3} - \dfrac{\pi}{2}$.
(D) è $F(x) = -\dfrac{x^3}{3}e^{-x^3} + 1$.

Integrando con la sostituzione $y = -x^3$

$$\int x^2 e^{-x^3}\,dx = \left(\int e^y \cdot \left(-\frac{dy}{3}\right)\right)_{y=-x^3} = \left(-\frac{1}{3}e^y + c\right)_{y=-x^3}$$

$$= -\frac{1}{3}e^{-x^3} + c \quad c \in \mathbb{R}$$

e la risposta corretta è la (C)

2

(4) I valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui converge la serie $\sum_n \left[(n+7)^{3\alpha} + |\alpha|^{n+4}\right]$ sono

(A) $-1 < \alpha < -1/3$.
(B) $-1/3 < \alpha < -1/4$.
(C) $-1/4 < \alpha < 1/7$.
(D) $-1 < \alpha < 1$.

Il termine generale è somma dei termini generali delle due serie

$$\sum_n (n+7)^{3\alpha} \quad e \quad \sum_n |\alpha|^{n+4}$$
(1) (2)

(1) converge se $-3\alpha > 1$ se $\alpha < -\frac{1}{3}$

(2) è una serie geometrica di ragione $|\alpha|$ e dunque converge se $-1 < \alpha < 1$

Dunque la serie di partenza converge se e soltanto se $\alpha \in \{x : x < -\frac{1}{3}\} \cap \{x : -1 < x < 1\}$

ovvero se $-1 < \alpha < -\frac{1}{3}$

e quindi la risposta corretta è la (A)

(5) La disequazione $3 \cdot 3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 3 \geq 0$ ha soluzione

(A) $x \leq 1/3$ o $x \geq 3$.
(B) $x \geq 0$.
(C) $x \leq 5/4$.
(D) $x \leq -1$ o $x \geq 1$.

Posto $y = 3^x$ $\quad 3 \cdot y^2 - 10y + 3 = 0$ se $y = \frac{5 \pm \sqrt{25-9}}{3} \begin{cases} 1/3 \\ 3 \end{cases}$

e dunque la disequazione è soddisfatta se, e soltanto se, $y = 3^x \notin (3^{-1}, 3)$.

ovvero se: $3^x \leq 3^{-1} = \frac{1}{3}$ o $3 \leq 3^x$

ovvero $x \leq -1$ o $1 \leq x$

Dunque la risposta corretta è la (D)

(6) L'integrale improprio $\int_0^1 \frac{1}{x^{2-\alpha}(1-x)^{\alpha-3}}\,dx$ converge se e solo se

(A) $\alpha < 1$.
(B) $2 < \alpha < 5$.
(C) $\alpha > 4$.
(D) $1 < \alpha < 4$.

Affinché l'integrale converge è necessario che $\int_0^{1/2} f(x)dx \in \mathbb{R}$ e $\int_{1/2}^{1} f(x)dx \in \mathbb{R}$
① ②

① quando $x \to 0$ $f(x) \sim \frac{1}{x^{2-\alpha}}$

e $\int_0^{1/2} \frac{1}{x^{2-\alpha}}dx$ converge se $2-\alpha<1$ se $1<\alpha$

② quando $x \to 1$ $f(x) \sim \frac{1}{(x-1)^{\alpha-3}}$
e $\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{x^{\alpha-3}}$ converge se $\alpha-3<1$ se $\alpha<4$

Dunque $\int_0^1 f \in \mathbb{R}$ se $1<\alpha<4$, e la risposta corretta è la (D)

(7) La successione $\left(n^2 - \sqrt{n^4+7n^3}\right) \cdot \mathrm{sen}(1/n)$ ha limite

(A) -7 .
(B) $-7/2$.
(C) $-\infty$.
(D) 0 .

$$a_n = \mathrm{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{\left(n^2 - \sqrt{n^4+7n^3}\right)}{n^2+\sqrt{n^4+7n^3}} \cdot \left(n^2+\sqrt{n^4+7n^3}\right)$$

$$= \mathrm{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{\cancel{n^4} - \cancel{n^4} - 7n^3}{n^2\left(1+\sqrt{1+\frac{7}{n}}\right)} \sim \frac{1}{n} \cdot \frac{-7n^3}{n^2 \cdot 2} \quad n\to+\infty$$

ovvero $a_n \sim -\frac{7}{2}$ $n \to +\infty$

e dunque la risposta corretta è la (B)

2^a Parte : Quesiti a risposta aperta

1) Determinate le soluzioni (z, w), con $z, w \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} 2\bar{z} - iw + 9i = 0 \\ z^2 - \bar{w} = 8i\sqrt{3} \, . \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2z + i\bar{w} - 9i = 0 \\ z^2 - \bar{w} - 8i\sqrt{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2iz + \bar{w} - 9 = 0 \\ z^2 - \bar{w} - 8i\sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

$$z^2 - 2iz - 9 - 8i\sqrt{3} = 0 \qquad z_{1,2} = i \pm \sqrt{-1 + 9 + 8i\sqrt{3}}$$

$$= i \pm 4 \cdot \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} i\right)^{1/2}$$

$$= i \pm 4 \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{i}{2}\right)$$

$$\begin{cases} z_1 = 2\sqrt{3} + 3i \\ w = 9 - 2i\bar{z} \\ \quad = 9 - 2i(2\sqrt{3} - 3i) \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = 2\sqrt{3} + 3i \\ w_1 = 3 - 4i\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_2 = -2\sqrt{3} - i \\ w = 9 - 2i(-2\sqrt{3} + i) \end{cases} \qquad \begin{cases} z_2 = -2\sqrt{3} - i \\ w_2 = 11 + 4\sqrt{3}\, i \end{cases}$$

2) Considerate la funzione $f(x) = x + 2 \arctan \frac{1}{x}$.

a) Determinatene il campo di esistenza, i limiti agli estremi del campo di esistenza, il segno, gli intervalli di monotonia, i punti di massimo/minimo locale, gli asintoti, gli intervalli di convessità. Studiate poi il limite della derivata prima agli estremi del campo di esistenza, e infine tracciate un grafico approssimativo della funzione utilizzando i dati ottenuti in precedenza.

b) (**SOLO ANALISI 1**) Determinate, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

Il campo di esistenza è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

La funzione soddisfa $f(x) = -f(-x) \ \forall x \neq 0$

e dunque posso studiarla solo per $x > 0$

Il $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x + \lim_{x \to 0^+} 2\,\mathrm{arctg}\, \frac{1}{x} = 0^+ + 2\,\mathrm{arctg}\, \frac{1}{0^+} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + 2\,\mathrm{arctg}\, \frac{1}{+\infty} = +\infty$$

Inoltre $f(x) > 0 \ \forall x > 0$ $(f(x) < 0 \ \forall x < 0)$

Per la monotonia si osserva che

$$f'(x) = 1 + 2 \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{2}{x^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

e quindi $f'(x) = 0$ se $x = \pm 1$

$$f' \begin{cases} > 0 & x < -1 \\ < 0 & -1 < x < 0 \end{cases} \quad e \quad f' \begin{cases} < 0 & 0 < x < 1 \\ > 0 & 1 < x \end{cases}$$

Ne segue che $x=-1$ p.to di max relativo $f(-1)=-1-\frac{\pi}{2}$

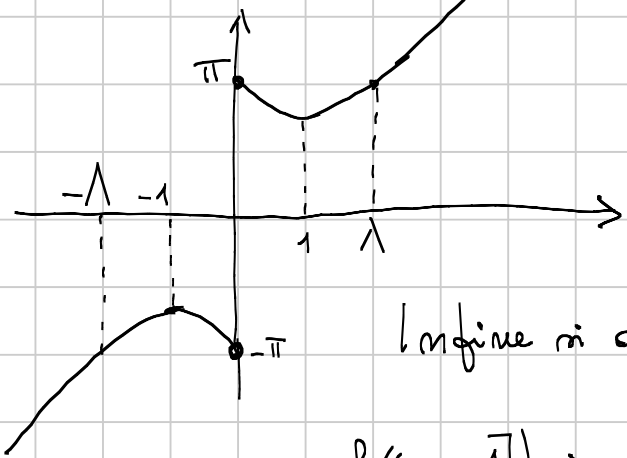
$x=1$ " " min " $f(1)=1+\frac{\pi}{2}$

Studiando $f''(x) = \dfrac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

si vede che f è $\begin{cases} \text{concava se } x<0 \\ \text{convessa se } 0<x \end{cases}$

Infine $f(x)=x$ è un asintoto obliquo per $x\to\pm\infty$, mentre

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\frac{1}{2}$$



Infine si osserva che

$k\le -\pi \Rightarrow k\in f((-\infty,-\Lambda]) \Rightarrow f^{-1}(k)$ è un insieme formato da 1 solo elemento

$\Rightarrow f(x)=k$ ha 1 soluzione

$-\pi<k<-1-\frac{\pi}{2} \Rightarrow k\in f((-\Lambda,-1))\cap f((-1,\pi)) \Rightarrow f(x)=k$ ha 2 soluzioni

$k=-1-\frac{\pi}{2} \Rightarrow k=f(-1) \Rightarrow f(x)=k$ ha 1 soluzione

$-1-\frac{\pi}{2}<k<1+\frac{\pi}{2} \Rightarrow k=f(x)$ NON ha soluzioni

$k=1+\frac{\pi}{2} \Rightarrow --- \Rightarrow f(x)=k$ ha 1 soluzione

$1+\frac{\pi}{2}<k<\pi \Rightarrow ---- \Rightarrow f(x)=k$ " 2 "

$\pi\le k \Rightarrow --- \Rightarrow f(x)=k$ " 1 soluzione

3) Determinate lo sviluppo di Taylor di ordine quattro e centrato in $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = \log(1 - 4x^2) - 2\log(\cos(3x))\,.$$

(SOLO ANALISI 1) Determinate poi il valore di $\alpha \geq 0$ tale che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-4x^2) - \log(\cos^2(\alpha x))}{x^4} = \ell_\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

e calcolate tale limite ℓ_α.

$$\cos(3x) = 1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{\cancel{81}^{27}}{\cancel{24}_{8}}x^4 + o(x^4) \qquad x \to 0$$

$$\log(\cos 3x) = -\frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{8}x^4 - \frac{1}{2}\left(-\frac{9}{2}x^2\right)^2 + o(x^4)$$

$$= -\frac{9}{2}x^2 + x^4\left(\frac{27}{8} - \frac{81}{8}\right) + o(x^4) \qquad x \to 0$$

$$= -\frac{9}{2}x^2 - \frac{27}{4}x^4 + o(x^4)$$

$$\log(1-4x^2) = -4x^2 - \frac{1}{2}(4x^2)^2 + o(x^4)$$

$$= -4x^2 - 8x^4 + o(x^4) \qquad x \to 0$$

Dunque

$$f(x) = -4x^2 - 8x^4 - 2\left(-\frac{9}{2}x^2 - \frac{27}{4}x^4\right) + o(x^4)$$

$$= 5x^2 + \frac{11}{2}x^4 + o(x^4) \qquad x \to 0$$

Inoltre

$$f_\alpha(x) = \log(1-4x^2) - 2\log(\cos(\alpha x)) = -4x^2 - 8x^4 + -2\log\left(1 - \frac{\alpha^2x^2}{2} + \frac{\alpha^4x^4}{24} + o(x^4)\right)$$

$$= x^2(-4+\alpha^2) + x^4\left(-8 - \frac{\alpha^4}{12} + \frac{\alpha^4}{4}\right) + o(x^4)$$

e quando $\alpha = 2$ $\quad f_\alpha(x) = x^4\left(-8 - \frac{\cancel{16}^{4}}{\cancel{12}_{3}} + \frac{\cancel{16}^{4}}{\cancel{4}_{1}}\right) + o(x^4)$

$$= -\frac{16}{3}x^4 + o(x^4) \qquad x \to 0$$

da cui segue $\ell_\alpha = -16/3$

4) Calcolate l' integrale generalizzato

$$\int_4^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)}\,dx\,.$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+4)} \sim \frac{1}{x^{3/2}} \qquad x \to +\infty \implies \int_4^{+\infty} f(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

$$\int_4^{M} f(x)\,dx \underset{\substack{y=\sqrt{x} \\ dx = 2y\,dy}}{=} \int_2^{\sqrt{M}} \frac{1}{\cancel{y}(y^2+4)} \cdot 2\cancel{y}\,dy = \left[\operatorname{arctg} \frac{y}{2}\right]_2^{\sqrt{M}}$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{M}}{2} - \operatorname{arctg} 1 \xrightarrow[M \to +\infty]{} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$