Prova scritta di Analisi Matematica 1 del 29 gennaio 2015

Prima Parte: Quiz a risposta multipla

(1) Se f è strettamente convessa, un suo sviluppo di Taylor centrato in $x_0 = 0$ potrebbe essere

(A) $x^4 - 2x^2 + o(x^4)$.

(B) $2x - 3x^4/4 + o(x^5)$.

(C) $1 - 2x + 3x^2 + o(x^2)$.

(D) $2 + x - x^2/2 + o(x^2)$.

Ricordiamo che $f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + o(x^m; 0)$, e dunque

(A) è falsa: infatti $\frac{f''(0)}{2!} = -2 \Rightarrow f''(0) = -4 < 0$ e dunque f non può essere convessa in un intorno di $x_0 = 0$

(B) è falsa: $f''(0) = f'''(0) = 0$ mentre $\frac{f^{(IV)}(0)}{4!} = -\frac{3}{4} \Rightarrow f^{(IV)}(0) = -18 < 0$ e dunque $f(x)$ non può essere convessa in un intorno di $x_0 = 0$

(C) **È VERA**: $\frac{f''(0)}{2} = 3 \Rightarrow f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow f(x)$ può risultare convessa in un intorno di $x_0 = 0$

(D) è falsa: $\frac{f''(0)}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow f''(0) = -1 < 0 \Rightarrow f(x)$ non può essere convessa in un intorno di $x_0 = 0$

(2) La successione $\sqrt[n]{\frac{2^n}{3^n} - \frac{n!}{n^n}}$ tende a

(A) $2/3$.

(B) 1.

(C) 0.

(D) $(2e-3)/3e$.

Posto $a_n = \sqrt[n]{\frac{2^n}{3^n} - \frac{n!}{n^n}} = \frac{2}{3} \sqrt[n]{1 - \frac{n!}{n^n}\left(\frac{3}{2}\right)^n}$, ricordando che

$$\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e} \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e} \Rightarrow \sqrt[n]{\left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{n!}{n^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{3}{2e}$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{n^n} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow \sqrt[n]{1 - \frac{n!}{n^n}\left(\frac{3}{2}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

$$\Rightarrow a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{3}$$ e dunque la risposta corretta è la (A)

(3) Sia $z \in \mathbb{C}$ tale che $\Re z > 0$ e $z^3 = i$. Quale tra le seguenti affermazioni è **vera**?

(A) $\Im z^2 = -i/2$.

(B) $\Re z^2 = 1/2$.

(C) $\Im z^2 = -\sqrt{3}/2$.

(D) $\Re z^2 \geq 1$.

$i = \cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \Rightarrow z_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

$z = \sqrt[3]{i}$

$z_2 = \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

$z_3 = \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -i$

La radice $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ è quella da prendere in esame, e si ha $z_1^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, ovvero $\operatorname{Re} z_1^2 = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{Im} z_1^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Dunque la risposta corretta è la (B).

(4) Quali sono i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali l'equazione $2^{2\,\mathrm{sen}\,x+1} = k$ ha soluzione?

(A) $2^{-1} \leq k \leq 2^1$.
(B) $0 \leq k \leq 2\pi$.
(C) $2^{-1} \leq k \leq 2^3$.
(D) $2^{-2} \leq k \leq 2^2$.

Osservando che $-1 \leq \mathrm{sen}\,x \leq 1$, ne segue che $-2 \leq 2\,\mathrm{sen}\,x \leq 2$, da cui $-2+1 = -1 \leq 2\,\mathrm{sen}\,x + 1 \leq 3 = 2+1$.
Quindi $2^{-1} \leq 2^{2\,\mathrm{sen}\,x+1} \leq 2^3$, da cui segue che la risposta corretta è la (C).

(5) Un sacchetto contiene 30 palline: 10 bianche, 10 rosse e 10 verdi. Pescando tre palline a caso, qual è la probabilità che siano di tre colori diversi?

(A) $\dfrac{\binom{10}{3}}{\binom{30}{3}}$.
(B) $\dfrac{30 \cdot 29 \cdot 28}{30!}$.
(C) $\dfrac{20}{29} \cdot \dfrac{10}{28}$.
(D) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$.

1ª soluzione: casi possibili $\binom{30}{3} = \dfrac{30!}{27!\,3!} = 29 \cdot 28 \cdot 5$

casi favorevoli $\binom{10}{1} \cdot \binom{10}{1} \binom{10}{1} = 10 \cdot 10 \cdot 10$

$$\text{Probabilità} = \frac{\binom{10}{1}\binom{10}{1}\binom{10}{1}}{\binom{30}{3}} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 10}{29 \cdot 28 \cdot 5} = \frac{20}{29} \cdot \frac{10}{28}$$

ovvero la (C)

2ª soluzione: La prima pallina la prendo come voglio
" seconda " " " diversa dalla prima : $\frac{20}{29}$
" terza " " " " dalle prime due $\frac{10}{28}$

e dunque $1 \cdot \dfrac{20}{29} \cdot \dfrac{10}{28}$ = Probabilità

3ª soluzione: la prima pallina rossa $\frac{10}{30}$
" seconda " bianca $\frac{10}{29}$
" terza " verde $\frac{10}{28}$

e dunque $\text{Probabilità} = \dfrac{10}{30} \cdot \dfrac{10}{29} \cdot \dfrac{10}{28} \cdot 3! = \dfrac{20}{29} \cdot \dfrac{10}{28}$

(6) La somma della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n-2}}$ vale

(A) $1/12$.
(B) 36.
(C) $2/9$.
(D) $9/2$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n-2}} = \frac{2}{3^{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \right) = 18 \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 \right) =$$

$$= 18 \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1 \right) = 18 \cdot (3-1) = 36$$

e quindi la risposta corretta è la (B).

(7) L'integrale $\displaystyle\int_1^{e^\pi} \frac{\mathrm{sen}\log x}{x}\,dx$ vale

(A) $e^{-\pi} - 1$.
(B) 2.
(C) 0.
(D) $e^{\pi} - 1$.

$$\int_1^{e^\pi} \frac{1}{x}\,\mathrm{sen}(\log x)\,dx \underset{\substack{y=\log x \\ dx = e^y dy}}{=} \int_0^{\pi} \mathrm{sen}(y) \cdot \frac{1}{\cancel{e^y}}\cancel{e^y}\,dy = \Big[-\cos y\Big]_{y=0}^{y=\pi} = 2$$ e quindi la risposta corretta è la (B).

Seconda parte: problemi a risposta aperta

Studiate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{(\alpha+1)^2}}{n^4+\alpha^{2n}}$.

$$\alpha^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \alpha^{2n} \leq 1 \Rightarrow a_n = \frac{n^{(\alpha+1)^2}}{n^4+\alpha^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{4-(\alpha+1)^2}} = b_n$$

$\sum_n b_n$ converge sse $4-(\alpha+1)^2 > 1$ sse $-1-\sqrt{3} < \alpha < -1+\sqrt{3}$

$$\begin{cases} -1 \leq \alpha \leq 1 \\ -1-\sqrt{3} < \alpha < -1+\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq \alpha < -1+\sqrt{3} \Rightarrow \sum_n b_n \text{ converge}$$

ma $\sum_n b_n \sim \sum_n a_n$

$\Rightarrow \sum_n a_n$ converge quando $-1 \leq \alpha < -1+\sqrt{3}$

$\sum_n a_n$ diverge quando $-1+\sqrt{3} \leq \alpha \leq 1$

Quando $\alpha^2 > 1$ si ha che

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^{(1+\alpha)^2}}{n^4+\alpha^{2n}}} = \frac{1}{\alpha^2} \cdot \sqrt[n]{n^{(1+\alpha)^2}} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{1+n^4\cdot\alpha^{-2n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\alpha^2}$$

e quindi, per il criterio della radice n-esima, si ha che $\sum_n a_n$ converge quando $\alpha < -1$ o $\alpha > 1$

Concludendo $\sum_n a_n$ converge se $\alpha < \sqrt{3}-1$ o $1 < \alpha$

" diverge se $\sqrt{3}-1 \leq \alpha \leq 1$

a) Determinate lo sviluppo di Taylor di ordine 4 della funzione $e^{\text{sen}(2x)}$, centrato in $x_0 = 0$.
b) Determinate lo sviluppo di Taylor di ordine 4 della funzione $\text{sen}(e^{2x}-1)$, centrato in $x_0 = 0$.
c) Studiate, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\text{sen}(2x)} - \text{sen}(e^{2x}-1) - 1}{x^\alpha}.$$

quando $x \to 0$

$$\text{sen}(2x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^4) = 2x + o(x^2)$$

$$e^{\text{sen}(2x)} = 1 + \left(2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^4)\right) + \frac{1}{2}(\cdots)^2 + \frac{1}{6}(\cdots)^3$$
$$+ \frac{1}{24}(\cdots)^4 + o\left(\left(2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^4)\right)^4\right) =$$
$$= 1 + 2x + 2x^2 + x^3\left(-\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\right) + x^4\left(-\frac{8}{3} + \frac{2}{3}\right) + o\left(\left(2x + o(x^2)\right)^4\right)$$
$$= 1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4)$$

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{24} + o(y^4) \Rightarrow e^{2x} - 1 = 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) = 2x + o(x)$$

$$\text{sen}\, y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^4) \Rightarrow$$

$$\text{sen}(e^{2x}-1) = \left(2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right) - \frac{1}{6}(\cdots)^3 + o\left((2x + o(x))^4\right)$$
$$= 2x + 2x^2 + x^3\left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3}\right) + x^4\left(\frac{2}{3} - \frac{24}{6}\right) + o(x^4)$$
$$= 2x + 2x^2 - \frac{10}{3}x^4 + o(x^4)$$

Dunque

$$e^{\operatorname{sen}(2x)} - \operatorname{sen}(e^{2x}-1) - 1 = 1+2x+2x^2-2x^4-2x-2x^2+\frac{10}{3}x^4-1+o(x^4)$$
$$= \frac{4}{3}x^4 + o(x^4)$$

Ne segue che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\operatorname{sen}(2x)} - \operatorname{sen}(e^{2x}-1)-1}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{4}{3}x^4+o(x^4)}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha<4 \\ 4/3 & \text{se } \alpha=4 \\ +\infty & \text{se } \alpha>4 \end{cases}$$

Considerate la funzione $f(x) = x^3(\log(x^2) - 1)$.

a) Determinatene dominio, limiti agli estremi del dominio, derivata (studiando anche i limiti di f' agli estremi del dominio), intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo o minimo locale, intervalli di concavità e convessità. Disegnate il grafico di f.

b) Calcolate l'area della parte del semipiano $x > 0$ che sta sopra il grafico di f e sotto l'asse delle ascisse.

Il dominio della funzione è $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

la funzione è dispari $f(-x) = (-x)^3(-1+\log(-x)^2) = -x^3(-1+\log(x^2)) = -f(x)$ $\forall x\neq 0$ e dunque la studieremo solo per $x>0$

Limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x^3\log x - \lim_{x\to 0^+} x^3 = 0^-$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^3 \log x^2 = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$$

Segno di $f(x)$

$x^3>0 \quad \forall x>0$

$$\log x^2 - 1 = 2\log x - 1 = 2(\log x - \log\sqrt{e}) \begin{cases} <0 & \text{se } 0<x<\sqrt{e} \\ =0 & \text{se } x=\sqrt{e} \\ >0 & \text{se } \sqrt{e}<x \end{cases}$$

e dunque $f(x) \begin{cases} <0 & \text{se } 0<x<\sqrt{e} \\ >0 & \text{se } \sqrt{e}<x \end{cases}$

Monotonia di $f(x)$

$$f'(x) = 3x^2\cdot(-1+\log(x^2)) + x^3\cdot\frac{2}{x} = -x^2 + 6x^2\log x$$
$$= x^2(6\log x - 1) =$$
$$= 6x^2\left(\log x - \frac{1}{6}\right) =$$
$$= 6x^2(\log x - \log e^{1/6})$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} <0 & 0<x<e^{1/6} \\ =0 & x=e^{1/6} \\ >0 & e^{1/6}<x \end{cases} \Rightarrow x=e^{1/6} \text{ p.to di minimo relativo}$$

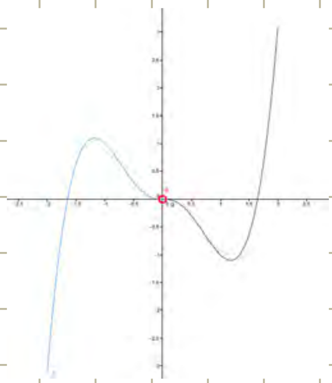
Nota $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$

Segno della derivata seconda

$$f''(x) = \left(x^2(6\log x-1)\right)' = 2x(-1+6\log x) + x^2\cdot\frac{6}{x}$$
$$= 4x + 12x\log x =$$
$$= 12x\left(\log x + \frac{1}{3}\right) =$$
$$= 12x(\log x + \log e^{1/3}) = 12x\left(\log x - \log\left(\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right)\right)$$

$$\Rightarrow f''(x) = \begin{cases} <0 & 0<x<\frac{1}{\sqrt[3]{e}} \\ 0 & x = 1/\sqrt[3]{e} \\ >0 & 1/\sqrt[3]{e} < x \end{cases} \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{e}} \text{ punto di flesso}$$

La funzione non ha asintoti, nè verticali, nè orizzontali nè obliqui ⑤



Questo è il grafico della funzione: in nero la parte che abbiamo studiato, mentre in azzurro la parte ottenuta dall'identità

$f(-x) = -f(x) \quad \forall x > 0$

(f è dispari!)

Dopo aver determinato le soluzioni $w \in \mathbb{C}$ del sistema

$$\begin{cases} |w + 2i + 1| = \sqrt{5} \\ |w - 3 - 2i| = \sqrt{13} \end{cases}$$

ed averle scritte sia in forma algebrica che trigonometrica, determinate le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ del sistema

$$\begin{cases} |z^2 + 2i + 1| = \sqrt{5} \\ |z^2 - 3 - 2i| = \sqrt{13}\,, \end{cases}$$

scrivendole in forma trigonometrica.

posto $w = a + ib$, il sistema diventa

$$\begin{cases} |a+bi+2i+1| = \sqrt{(a+1)^2+(b+2)^2} = \sqrt{5} \\ |a+bi-3-2i| = \sqrt{(a-3)^2+(b-2)^2} = \sqrt{13} \end{cases}$$

questa è l'intersezione tra due circonferenze

una centrata in $(-1,-2)$ di raggio $\sqrt{5}$

" " " $(3,2)$ " " $\sqrt{13}$

Le intersezioni sono 2 distinte date da

$$\begin{cases} (a+1)^2+(b+2)^2 = 5 \\ (a-3)^2+(b-2)^2 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+2a+b+4b = 0 \\ a^2-6a+b^2-4b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8a+8b = 0 \\ a^2-6a+b^2-4b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = -a \\ a^2-6a+a^2+4a = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = -a \\ 2a(a-1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \Rightarrow w_1 = 0 = 0\cdot(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \quad \forall \theta \in [0, 2\pi[$$

$$\begin{cases} b = -1 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow w_2 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{7}{4}\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{7}{4}\pi\right)\right)$$

Per determinare le soluzioni del 2° sistema si osserva che vale la relazione $w = z^2$

e dunque troviamo le tre radici z_1, z_2 e z_3

$$z_1 = \sqrt{w_1} = 0 = 0\cdot(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \quad \forall \theta \in [0, 2\pi[$$

$$\sqrt{w_2} = \left\{ \sqrt[4]{2}\cdot\left(\cos\left(\tfrac{7}{8}\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{7}{8}\pi\right)\right) ; \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\tfrac{15}{8}\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{15}{8}\pi\right)\right) \right\}$$

$$= \{z_2, z_3\}$$