Prova scritta di Analisi Matematica 1 del 15 gennaio 2015

Prima Parte: Quiz a risposta multipla

Esercizio 1. Tre di questi numeri complessi hanno parte immaginaria zero per qualunque $z \in \mathbb{C}$, il quarto non sempre. Qual è?

(A) $(z^2+1)/(|z|^2+1)$.

(B) $(3z)\cdot(2\bar{z})$.

(C) $i(z+\bar{z})(z-\bar{z})$.

(D) $(z+\bar{z})/(3+|z-2i\bar{z}|)$.

La risposta corretta è la (A), in quanto prendendo $z = 1+i$ si ha $\frac{(1+i)^2+1}{|1+i|^2+1} = \frac{1-1+2i+1}{2+1} = \frac{1}{3}+\frac{2}{3}i = \omega$

e si ha $\mathrm{Im}(\omega) = 2/3 \neq 0$

Al contrario $3z\cdot 2\bar{z} = 6|z|^2 \in \mathbb{R}$, dunque la (B) è falsa

Inoltre $i(z+\bar{z})(z-\bar{z}) = i(2\,\mathrm{Re}\,z)\cdot(2i\,\mathrm{Im}\,z) = 4\,\mathrm{Re}\,z\,\mathrm{Im}\,z \in \mathbb{R}$ -4(Re z)(Im z)

dunque la (C) è falsa. Infine $3+|z-2i\bar{z}| \in \mathbb{R}$ e $z+\bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$

e dunque $\frac{z+\bar{z}}{3+|z-2i\bar{z}|} \in \mathbb{R}$, da cui segue che la (D) è falsa.

Esercizio 2. Un'astronave aliena vaporizza tre dei nove pianeti del sistema solare. Qual è la probabilità che la Terra si sia salvata?

(A) $2/3$.

(B) $1/\binom{9}{3}$.

(C) $8/\binom{9}{3}$.

(D) $1/3$.

La probabilità che la Terra non venga vaporizzata al primo colpo è $8/9$

" " " " " " " " secondo " " $7/8$

" " " " " " " " Terzo " " $6/7$

e dunque $P(\text{Terra non sia vaporizzata in tre colpi}) = \frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{6}{7} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

ovvero la risposta corretta è la (A)

Alternativamente si possono considerare

$\binom{9}{3}$ = casi possibili = Tutte le possibili vaporizzazioni

$\binom{8}{3}$ = casi favorevoli = Tutte le possibili vaporizzazioni in cui la terra si salva

$$P(\text{Terra non sia vaporizzata in tre colpi}) = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{8!}{3!\,5!}\,\frac{3!\,6!}{9!} = \frac{2}{3}$$

Esercizio 3. Per quali valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \arctan(4x) + \beta \cos(\pi + x) + e^{2x} & \text{se } x \le 0 \\ 5\alpha - 2\beta x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

risulta derivabile su tutto $\mathbb{R}$?

(A) $\alpha = 2/3\,,\ \beta = -7/3\,.$
(B) $\alpha = 2\,,\ \beta = -9\,.$
(C) $\alpha = -1\,,\ \beta = 1\,.$
(D) $\alpha = 1/3\,,\ \beta = -2/3\,.$

$f_{|]-\infty,0[}(x)$ è derivabile $\forall x<0$, $f_{|]0,+\infty[}$ è derivabile $\forall x>0$ comunque si prendano $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Resta da studiare cosa accade in $x=0$. Per avere la continuità in $x=0$ è necessario che

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \alpha \arctan(4\cdot 0) + \beta\cos(\pi+0) + e^{2\cdot 0} = 5\alpha - 2\beta\cdot 0 = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$$\Rightarrow \quad -\beta + 1 = 5\alpha \quad (*)$$

$$f'(x) = \frac{4\alpha}{1+16x^2} - \beta \operatorname{sen}(\pi + x) + 2e^{2x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} 4\alpha + 2$$

$$f'(x) = -2\beta \xrightarrow[x\to 0^+]{} -2\beta \qquad \Rightarrow \text{necessariamente } -2\beta = 4\alpha + 2 \quad (**)$$

Per la derivabilità è necessario che valgano $(*)$ e $(**)$

$$\begin{cases} \beta = 1 - 5\alpha \\ 4\alpha + 2 = -2(1-5\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} // \\ 6\alpha = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 1 - \frac{10}{3} = -\frac{7}{3} \\ \alpha = \frac{2}{3} \end{cases}$$

e quindi la risposta corretta è la (A)

Esercizio 4. Per $n \to +\infty$ la successione $\dfrac{3\operatorname{sen}(2/n) - 2\tan(3/n^2)}{4\tan(1/n) - 5\operatorname{sen}(1/n^2)}$ tende a

(A) $3/2\,.$
(B) $-1\,.$
(C) $3/4\,.$
(D) $0\,.$

Si ha $\operatorname{sen}(t) = t + o(t^2; 0)$ e $\tan(t) = t + o(t^2; 0)$ da cui segue

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}; +\infty\right) \qquad \operatorname{sen}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^4}; +\infty\right)$$

$$\tan\left(\frac{3}{n^2}\right) = \frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^4}; +\infty\right) \qquad \tan\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}; +\infty\right)$$

e dunque

$$\frac{3\operatorname{sen}(2/n) - 2\tan(3/n^2)}{4\tan(1/n) - 5\operatorname{sen}(1/n^2)} = \frac{3\left(\frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 2\left(\frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)}{4\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 5\left(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)} =$$

$$= \frac{\frac{6}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{4}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

e quindi la risposta corretta è la (A)

Esercizio 5. La derivata di $G(x) = \int_0^{2x+3} \log(e + t^2)\,dt$ è

(A) $2\log(e + (2x+3)^2)\,.$
(B) $\log(e + (2x+3)^2) - \log e\,.$
(C) $(2x+3)\log(e + x^2)\,.$
(D) $2\log(e + x^2) + 3\log e\,.$

Posto $F(x) = \int_0^x \log(e+t^2)\,dt$, si ha $F'(x) = \log(e + x^2)$ per il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

Posto $h(x) = 2x+3$, si ha $h'(x) = 2$

Dunque $G'(x) = (F(h(x)))' = F'(h(x))\cdot h'(x) = \log(e + (2x+3)^2)\cdot 2$

e dunque la risposta corretta è la (A).

Esercizio 6. Quale di queste funzioni è infinitesima di ordine più alto, per $x \to 0$?

(A) $\operatorname{sen} x^2 - \tan x^2$.

(B) $e^{x^5} - 1$.

(C) $x^2(1-\cos x)$.

(D) $\log(1+\operatorname{sen}^3 x)$.

$\operatorname{sen} t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4;0)$; $\tan t = t + \frac{t^3}{3} + o(t^4;0)$; $e^t = 1+t+o(t;0)$

$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3;0)$; $\log(1+t) = t + o(t;0)$

$$\operatorname{sen}(x^2) - \tan(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} - x^2 - \frac{x^6}{3} + o(x^8;0) = -\frac{x^6}{2} + o(x^8;0)$$

$$e^{x^5} - 1 = 1 + x^5 + o(x^5;0) - 1 = x^5 + o(x^5;0)$$

$$x^2(1-\cos x) = x^2\left(1 - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3;0)\right) = \frac{x^4}{2} + o(x^5;0)$$

$$\log(1+\operatorname{sen}^3 x) = \operatorname{sen}^3(x) + o(\operatorname{sen}^3 x;0)$$
$$= (x+o(x^2))^3 + o\left((x+o(x^2))^3\right)$$
$$= x^3 + o(x^4) + o\left(x^3 + o(x^4)\right)$$
$$= x^3 + o(x^3)$$

Ne segue che la risposta corretta è la (A).

Esercizio 7. Considerate l'integrale improprio $\int_0^1 \frac{\arctan(x^{1/3})}{x^\alpha \log(1+x)}\, dx$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(A) Converge se $\alpha < 1/3$.

(B) Diverge se $0 < \alpha < 1/3$.

(C) Converge se $1/3 < \alpha < 2/3$.

(D) Diverge se $\alpha < 0$.

$f(x) = \dfrac{\arctan(x^{1/3})}{x^\alpha \log(1+x)}$ è continua su $]0,1]$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, dunque

va esaminato il suo comportamento per $x \to 0^+$ e si ha

$$f(x) = \frac{x^{1/3} + o(x^{1/3};0)}{x^\alpha(x+o(x;0))} = \frac{x^{1/3}}{x^{1+\alpha}} \cdot \frac{1+o(x^{1/3};0)}{1+o(1;0)} \sim \frac{1}{x^{\alpha+1-1/3}} \quad x \to 0$$

(infatti $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{1/x^{\alpha+2/3}} = 1$). Ne segue, per il Criterio del confronto asintotico, che

$$\int_0^1 f(x)\,dx \sim \int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha+1-1/3}}$$ e quest'ultimo integrale

converge se $\alpha + 1 - \frac{1}{3} < 1$ se $\alpha < \frac{1}{3}$

Ne segue che la risposta corretta è la (A).

Determinate le soluzioni (z, w), con $z, w \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} 3z - 2\mathrm{i}\bar{z} = w \\ 12w + 8\mathrm{i}\bar{w} = (13\mathrm{i} + 2z)(13\mathrm{i} - 2z)\,. \end{cases}$$

Sostituendo la prima equazione nella seconda otteniamo

$$12(3z - 2i\bar{z}) + 8i\,\overline{(3z - 2i\bar{z})} = 169 \cdot i^2 - 4z^2$$

$$36z - 24i\bar{z} + 8i(3\bar{z} + 2iz) = -169 - 4z^2$$

$$36z - \cancel{24i\bar{z}} + \cancel{24i\bar{z}} - 16z + 169 + 4z^2 = 0$$

$$4z^2 + 20z + 169 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 676}}{4} \begin{cases} -\frac{5}{2} - 6i = z_1 \\ -\frac{5}{2} + 6i = z_2 \end{cases}$$

Sostituendo nella prima equazione si trova

$$\begin{cases} w_1 = 3\left(-\frac{5}{2} - 6i\right) - 2i\left(-\frac{5}{2} + 6i\right) \\ z_1 = -\frac{5}{2} - 6i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = -\frac{15}{2} + 12 + i(-18 + 5) \\ \text{"} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = \frac{9}{2} - 13i \\ z_1 = -\frac{5}{2} - 6i \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_2 = 3\left(-\frac{5}{2} + 6i\right) - 2i\left(-\frac{5}{2} - 6i\right) \\ z_1 = -\frac{5}{2} + 6i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_2 = -\frac{15}{2} - 12 + i(18 + 5) \\ \text{"} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_2 = -\frac{39}{2} + 23i \\ z_2 = -\frac{5}{2} + 6i \end{cases}$$

Nota: $4z^2 + 20z + 169 = 0$ posto $z = x + iy$ diventa

$4(x^2 - y^2 + 2ixy) + 20(x + iy) + 169 = 0$ da cui segue

$$\begin{cases} 4x^2 - 4y^2 + 20x + 169 = 0 \\ 8xy + 20y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{"} \\ 4y(2x + 5) = 0 \end{cases}$$

① $\begin{cases} \cancel{4x^2 + 20x + 169 = 0} \\ \cancel{y = 0} \end{cases}$ ha radici complesse

② $$\begin{cases} 4 \cdot \frac{25}{4} - 20 \cdot \frac{5}{2} + 169 = 4y^2 \\ x = -\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y^2 = 169 - 25 \\ \text{"} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 36 \\ \text{"} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm 6 \\ x = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

da cui segue $z_1 = -\frac{5}{2} - 6i \quad z_2 = -\frac{5}{2} + 6i$

PROBLEMA 2

Sia $a_n = \int_{1/n}^{1} (1 - x)^n \, dx$.

a) Determinate a_n e calcolate, se esiste, $\lim_{n \to +\infty} a_n$.

b) Determinate, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il limite $\lim_{n \to +\infty} (n^\alpha a_n)$.

c) Studiate, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie $\sum (n^\alpha a_n)$.

Si ha $$a_n = \int_{1/n}^{1} (1-x)^n dx \underset{\substack{t = 1-x \\ dt = -dx}}{=} \int_{1-1/n}^{0} t^n \cdot (-dt) = \int_0^{1-1/n} t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_{t=0}^{t=1-1/n}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Si ha $$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0^+ \cdot \frac{1}{e}^- \cdot 1^- = 0^+$$

Inoltre $$\lim_{n \to +\infty} n^\alpha a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha}{n+1} \cdot \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{e} \cdot \lim_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha}{n} = \begin{cases} 0 & \alpha < 1 \\ 1/e & \alpha = 1 \\ +\infty & \alpha > 1 \end{cases}$$

Ne segue che $n^{\alpha} a_n \sim \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{n^{1-\alpha}}$ quando $n \to +\infty$, da cui segue, per il Criterio del confronto asintotico, che

$$\sum_n n^{\alpha} a_n \sim \frac{1}{e} \sum_n \frac{1}{n^{1-\alpha}}$$

ma quest'ultima serie converge se $1-\alpha > 1$ se $\alpha < 0$

e dunque $\sum_n n^{\alpha} a_n$ converge se $\alpha < 0$

Considerate la funzione $f(x) = x + |\arctan(2x)|$.

a) Determinatene dominio, limiti agli estremi del dominio, derivata (studiando gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di non derivabilità), punti di massimo o minimo locale; provate l'esistenza di un asintoto obliquo e determinatene l'equazione; disegnate il grafico di f.

b) Determinate al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

c) Calcolate l'area della parte di piano compresa fra le rette di equazioni $x = 0$ e $x = 1/2$, che si trova al di sopra del grafico di f e al di sotto dell'asintoto obliquo.

Il dominio di $f(x)$ è tutto $\mathbb{R}$, e si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x + \lim_{x\to+\infty} |\arctan(2x)| = +\infty + \frac{\pi}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x + \lim_{x\to-\infty} |\arctan(2x)| = -\infty + \frac{\pi}{2} = -\infty$$

$f(0) = 0$. La funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$

Studio della monotonia

f è derivabile $\forall x \neq 0$ e si ha $f'(x) = 1 + \frac{\arctan(2x)}{|\arctan(2x)|} \cdot \frac{2}{1+4x^2}$

e dunque $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 1$ $\quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to-\infty} f'(x) = 1$

$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = 1+2 = 3 \neq -1 = \lim_{x\to0^-} f'(x)$$

(in quanto $f'(x) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{1+4x^2} & x<0 \\ 1+\frac{2}{1+4x^2} & x>0 \end{cases}$).

Studiamo il segno di $f'(x)$: quando $x>0$, $f'(x) = \frac{4x^2+3}{4x^2+1} > 0$

mentre quando $x<0$ $f'(x) = \frac{4x^2-1}{4x^2+1} \begin{cases} >0 & x<-\frac{1}{2} \\ <0 & -\frac{1}{2}<x<0 \end{cases}$

Ne segue che $x = -\frac{1}{2}$ p.to di max relativo $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$

$x = 0$ " " min relativo $f(0) = 0$

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{16x}{(1+4x^2)^2} & x<0 \\ -\frac{16x}{(1+4x^2)^2} & x>0 \end{cases} \Rightarrow f \text{ concava su } \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Infine, sapendo che $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, si ha che

$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} |\arctan(2x)| = \frac{\pi}{2}$, da cui segue che

$y = x + \frac{\pi}{2}$ è asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$

Osservando che

$$f :]-\infty, -\tfrac{1}{2}[\longrightarrow]-\infty, \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{1}{2}[\quad \text{è biiettiva}$$
$$f : [-\tfrac{1}{2}; 0] \longrightarrow [0, \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{1}{2}] \quad \text{''} \quad \text{''}$$
$$f :]0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[\quad \text{''} \quad \text{''}$$

si ha che l'equazione $f(x) = k$ possiede

1	soluzione	se	$k < 0$
2	"	se	$k = 0$
3	"	se	$0 < k < \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$
2	"	se	$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = k$
1	"	se	$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} < k$

Dobbiamo calcolare l'area della regione

$$\{(x,y) \quad 0 \le x \le \tfrac{1}{2} \quad f(x) \le y \le x + \tfrac{\pi}{2}\}, \text{ ovvero}$$

$$\int_0^{1/2} \left(x + \frac{\pi}{2} - f(x)\right) dx = \int_0^{1/2} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(2x)\right) dx = \int_0^{1/2} \frac{\pi}{2} dx - \int_0^{1/2} \arctan(2x)\, dx$$

$$\underset{\substack{t=2x \\ dt=2dx}}{=} \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \arctan(t)\, dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[t \arctan t - \frac{1}{2}\log(1+t^2)\right]_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\arctan(1) - \frac{1}{2}\log 2\right] = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\log 2$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\log 2$$

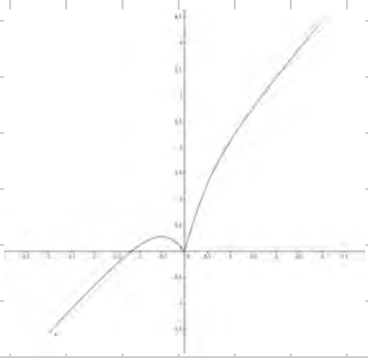

Grafico di $f(x)$

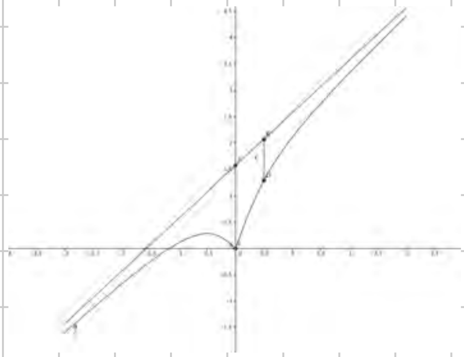

Grafico di $f(x)$ e dell'asintoto $y = x + \frac{\pi}{2}$
L'area da calcolare è quella delimitata dai punti C, D, E ed F

Sia $f(x) = \log[1 + (x/e)]$.

a) Dopo aver determinato lo sviluppo di Taylor di ordine 3, centrato in $x_0 = 0$, della funzione f, determinate anche quello della funzione $\log((e + x)^e)$.

b) Determinate lo sviluppo di Taylor di ordine 3, centrato in $x_0 = 0$, della funzione $\dfrac{e}{\log(e + x)}$.

c) Studiate, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il limite

Osservando che $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$, $t \to 0$ si ha

$$f(x) = \log\left(1+\frac{x}{e}\right) = \frac{x}{e} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{e^2} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{e^3} + o(x^3), \quad x \to 0$$

Si ha poi

$$\log((e+x)^e) = e\log(x+e) = e\log\left(e\cdot\left(1+\frac{x}{e}\right)\right) = e\cdot\log e + e\log\left(1+\frac{x}{e}\right)$$

utilizzando il passo precedente $\longrightarrow$

$$= e + e\left(\frac{x}{e} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{e^2} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{e^3} + o(x^3)\right)$$

$$= e + x - \frac{1}{2e}\cdot x^2 + \frac{1}{3e^2}\cdot x^3 + o(x^3), \quad x \to 0$$

come pure, ricordando che $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + o(t^3)$, si ha

$$\frac{e}{\log(x+e)} = \frac{e}{\log\left(e\left(1+\frac{x}{e}\right)\right)} = \frac{e}{1+\log\left(1+\frac{x}{e}\right)} = \frac{e}{1+\frac{x}{e} - \frac{x^2}{2e^2} + \frac{x^3}{3e^3} + o(x^3)}$$

$$= e\left\{1 - \left(\frac{x}{e} - \frac{x^2}{2e^2} + \frac{x^3}{3e^3} + o(x^3)\right) + (\dots)^2 - (\dots)^3 + o((\dots)^3)\right\}$$

$$= e\left\{1 - \frac{x}{e} + \frac{x^2}{2e^2} - \frac{x^3}{3e^3} + o(x^3) + \left(\frac{x^2}{e^2} - \frac{x^3}{e^3}\right) - \left(\frac{x^3}{e^3}\right)\right\}$$

$$= e\left\{1 - \frac{x}{e} + \frac{x^2}{e^2}\left(\frac{1}{2}+1\right) + \frac{x^3}{e^3}\left(-\frac{1}{3} - 1 - 1\right) + o(x^3)\right\}$$

$$= e - x + \frac{3}{2}\frac{x^2}{e} - \frac{7}{3}\frac{x^3}{e^2} + o(x^3)$$

Sostituendo alle funzioni i loro sviluppi si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log((x+e)^e) + \frac{e}{\log(x+e)} - 2e}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e + x - \frac{x^2}{2e} + o(x^2) + e - x + \frac{3}{2}\frac{x^2}{e} - 2e}{x^\alpha}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^2}{e} + o(x^2)}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^\alpha}\cdot\left(\frac{1}{e} + o(1)\right) = \begin{cases} 0 & \alpha < 2 \\ 1/e & \alpha = 2 \\ +\infty & \alpha > 2 \end{cases}$$

Si noti che s'è fatto uso dello sviluppo sino al 2° ordine, in quanto il numeratore è un infinitesimo di ordine 2 quando $x \to 0$!!

NOTA BENE:

È un errore GRAVE scrivere, ad esempio

$$\underbrace{\log\left(1+\frac{x}{e}\right)}_{\text{funzione non lineare}} = \underbrace{\frac{x}{e} - \frac{x^2}{2e^2} + \frac{x^3}{3e^3}}_{\text{polinomio di 3° grado}}$$

È un errore GRAVE scrivere

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{1/n - \operatorname{sen} 1/n}{\sqrt{n^2+1} - n}}_{\text{non dipende da } n} = \underbrace{\frac{1/n - \operatorname{sen} 1/n}{n^2+1-n^2}\cdot\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}_{\text{dipende da } n !!}$$