Prova scritta di Analisi Matematica 1 - SOLUZIONI
Ingegneria Gestionale - 17 febbraio 2015

1ª Parte - Quiz a risposta multipla

Esercizio 1. Una scatola contiene 16 caramelle alla fragola e 4 al limone. Pescandone 3, qual è la probabilità di trovarne esattamente 2 alla fragola?

(A) $8/19$.

(B) $\dfrac{16 \cdot 16 \cdot 4}{20!}$.

(C) $\binom{4}{1}/\binom{16}{2}$.

(D) $\binom{16}{2}/\binom{20}{3}$.

Evento E: "estrazione di 2 caramelle fragola
1 " limone"

Casi Possibili $= \binom{20}{3}$ tutte le possibili terne

Casi Favorevoli $= \underbrace{\binom{16}{2}}_{\text{2 caramelle fragola}} \binom{4}{1}$ ← 1 caramella limone

$$P(E) = \frac{\binom{16}{2}\binom{4}{1}}{\binom{20}{3}} = \frac{16!}{2!\,14!}\,\frac{4!}{1!\,3!}\cdot\frac{3!\,17!}{20!} = \frac{8}{19}$$

e quindi la risposta corretta è la (A)

oppure

$$P(E) = \frac{16}{20}\,\frac{15}{19}\,\frac{4}{18} + \frac{16}{20}\cdot\frac{4}{19}\cdot\frac{15}{18} + \frac{4}{20}\cdot\frac{16}{19}\cdot\frac{15}{18}$$

$$= \frac{16}{20}\,\frac{15}{19}\cdot\frac{4}{18}\cdot\frac{3!}{2!} = 8/19$$

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte e tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Quale tra le seguenti affermazioni è vera?

(A) Esiste x_0 tale che $f'(x_0) = 0$.

(B) Se $f'(x_0) = 0$ allora $f''(x_0) \geq 0$.

(C) $f''(x) \geq 0$ per ogni x.

(D) f ha uno ed un solo punto di minimo assoluto.

(Corollario Weierstrass)

f continua, $\lim_{x\to-\infty} f = \lim_{x\to+\infty} f = +\infty \Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) = \min f(\mathbb{R})$

ma x_0 è minimo locale interno
f derivabile in x_0 $\xRightarrow{\text{(Lemma Fermat)}}$ $f'(x_0) = 0$

e quindi la (A) è vera.

Presa poi $f(x) = (x^2-1)^2$

(B) falsa : $f'(0) = 0$ e $f''(0) < 0$

(C) falsa : $f''(0) < 0$

(D) falsa : $f(-1) = f(1) = 0 = \min f(\mathbb{R})$

Esercizio 3. Per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{\pi}\arctan(1/x) & \text{se } x < 0 \\ x^2 + bx + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ è derivabile su $\mathbb{R}$?

(A) $a = -2$, $b = 2/\pi$.

(B) $b = -a/\pi$, qualsiasi sia $a \in \mathbb{R}$.

(C) $a = 2$, $b = -2/\pi$.

(D) Nessuna delle altre risposte è vera.

f è certamente derivabile $\forall x \neq 0$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$

Nel punto $x = 0$ si ha

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{a}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \lim_{x \to 0^+} f \Rightarrow \boxed{a = -2} \ 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{a}{\pi} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{a}{\pi} = b = \lim_{x \to 0^+} (2ax + b) = \lim_{x \to 0^+} f'$$

$$\Rightarrow \boxed{b = -\frac{a}{\pi}} \ 2$$

1 + 2 $\Rightarrow$ $a = -2$ & $b = 2/\pi$

e quindi la risposta vera è la (A)

Esercizio 4. Considerate l'integrale improprio $I = \int_0^1 \frac{\sqrt{x} + e^{3x}}{x^{\alpha - 1/2}(1+x)^2}\,dx$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Quale tra le seguenti affermazioni è vera?

(A) Se $\alpha \leq 1$ allora I converge.

(B) Se $\alpha < 2$ allora I converge.

(C) I converge se, e soltanto se, $\alpha < 0$.

(D) Se $\alpha > 1$ allora I converge.

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + e^{3x}}{x^{\alpha - \frac{1}{2}}(1+x)^2}$ è continua su $]0, 1]$, e quindi

per applicare il Criterio Confronto Asintotico debbo studiarne il comportamento in $x_0 = 0$

$$f(x) = \frac{1 + o(1)}{x^{\alpha - \frac{1}{2}} \cdot (1 + o(1))} \sim \left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha - \frac{1}{2}} \quad x \to 0, \text{ dunque}$$

$\int_0^1 f\,dx \in \mathbb{R}$ se $\alpha - \frac{1}{2} < 1$ se $\alpha < \frac{3}{2}$

e la risposta corretta è la (A)

Esercizio 5. I valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la serie $\sum_n (|\alpha+5| - |\alpha-3|)^n$ converge sono

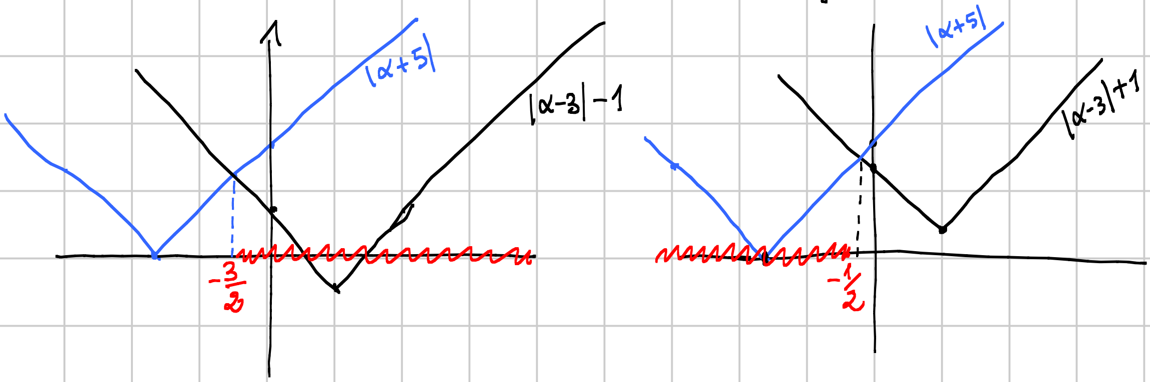
(A) $-3/2 < \alpha < -1/2$.
(B) $-5 < \alpha < 3$.
(C) $\alpha > -5/3$.
(D) $1/2 < \alpha < 3/2$.

La serie geometrica in esame converge se

$$-1 < |\alpha+5| - |\alpha-3| < 1$$

ovvero se

$$|\alpha-3| - 1 < |\alpha+5| \quad e \quad |\alpha+5| < 1 + |\alpha-3|$$



e quindi si ha $\alpha \in]-\frac{3}{2}, +\infty[\cap]-\infty, -\frac{1}{2}[=]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$
ovvero la (A) è VERA

Esercizio 6. Quale dei seguenti numeri complessi si trova nel secondo quadrante del piano di Gauß?

(A) $(1701 + 1699i)(0,00273 + 0,273i)$.
(B) $(1701 - 1699i)(0,00273 - 0,273i)$.
(C) $(1701 + 1699i)(0,00273 - 0,273i)$.
(D) $(1701 - 1699i)(0,00273 + 0,273i)$.

Qui si deve fare un ragionamento approssimato, e interessa solo l'argomento di z_1 e di z_2

(A) $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \sim \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi$
da cui segue $z_1 \cdot z_2 \in 2°$ quadrante ovvero (A) è VERA

(B) $\arg(z_1 \cdot z_2) \sim \frac{7}{4}\pi + \frac{3}{2}\pi \Rightarrow z_1 z_2 \in 3°$ quadrante

(C) $\arg(z_1 \cdot z_2) \sim \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\pi = \frac{7}{4}\pi \Rightarrow z_1 z_2 \in 4°$ quadrante

(D) $\arg(z_1 \cdot z_2) \sim \frac{7}{4}\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{9}{4}\pi \Rightarrow z_1 z_2 \in 1°$ quadrante

Esercizio 7. Per $n \to +\infty$ la successione $\left(\dfrac{n^2+3n+1}{2+n^2}\right)^n$ tende a

(A) e^3.

(B) $+\infty$.

(C) 1.

(D) $(3/2)^n$.

$$a_n = \left(1 + \frac{3n-1}{n^2+2}\right)^n = e^{n \log\left(1+\frac{3n-1}{n^2+2}\right)}$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} n \cdot \log\left(1+\frac{3n-1}{n^2+2}\right) \cdot \frac{\frac{3n-1}{n^2+2}}{\frac{3n-1}{n^2+2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2-n}{n^2+2} \cdot \lim \frac{\log\left(1+\frac{3n-1}{n^2+2}\right)}{\frac{3n-1}{n^2+2}}$$

$$= 3 \cdot \lim_{z\to 0} \frac{\log(1+z)}{z} = 3$$

dunque $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = e^3$ e la (A) è VERA

2ª Parte: Quesiti a risposta aperta

Trovate le soluzioni (z, w), con $z, w \in \mathbb{C}$, del sistema $\begin{cases} 4|z|^2 + w^2 = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{z\bar{w}}{w} + 2\bar{z} = \mathrm{i}\,. \end{cases}$

$w \neq 0$

Dalla prima equazione $w^2 = \left(\frac{1}{3} - 4|z|^2\right) \in \mathbb{R}$

e quindi $w = a \in \mathbb{R}$ (quando $w^2 > 0$)

oppure $w = ib$ (" $w^2 < 0$)

1° caso: $w = a \in \mathbb{R}$ e il sistema diventa $\begin{cases} 4|z|^2 + a^2 = 1/3 \\ z + 2\bar{z} = i \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 4 + a^2 = 1/3 \\ z = -i \end{cases}$ IMPOSSIBILE, poiché $1/3 - 4 < 0$!

2° caso $w = ib$ e il sistema diventa $\begin{cases} 4|z|^2 - b^2 = 1/3 \\ -z + 2\bar{z} = i \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} b^2 = 4 \cdot \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \\ z = -i/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -i/3 \\ w_1 = i/3 \end{cases}$ o $\begin{cases} z_2 = -i/3 \\ w_2 = -i/3 \end{cases}$

Considerate per $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = x - \log(\operatorname{sen} x + \cos x) + \alpha x^2(3 - 2x) .$$

a) Dite per quali valori di α la funzione f è un infinitesimo di ordine 4 per $x \to 0$.

b) Calcolate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \log(\operatorname{sen} x + \cos x) + \alpha x^2(3 - 2x)}{x^4} .$$

Sviluppiamo fino al 4° ordine

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + o(y^4) \qquad y \to 0$$

$$\operatorname{sen} x + \cos x = x - \frac{x^3}{6} + 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) = 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4),\ x \to 0$$

$$\Rightarrow \log(\operatorname{sen} x + \cos x) = \log\left(1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^2}{2}\right)^3 - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\left(x^2 - x^3 + \frac{x^4}{4} - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(x^3 - \frac{3}{2}x^4\right) - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$= x - x^2 + x^3\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + x^4\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + o(x^4)$$

$$= x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) \qquad x \to 0$$

$$\Rightarrow f(x) = x - \left(x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right) + \alpha x^2(3 - 2x)$$

$$= x^2(1 + 3\alpha) + x^3\left(-\frac{2}{3} - 2\alpha\right) + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

Quando $\alpha = -\frac{1}{3}$ $\quad$ ordine$(f) = 4$ $\quad$ pp$(f) = \frac{2}{3}x^4$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^4} = \begin{cases} \lim_{x\to 0} \dfrac{(1+3\alpha)x^2 + o(x^2)}{x^4} = -\infty & \alpha < -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \alpha = -\frac{1}{3} \\ \lim_{x\to 0} \dfrac{(1+3\alpha)x^2 + o(x^2)}{x^4} = +\infty & -\frac{1}{3} < \alpha \end{cases}$$

Considerate la funzione $f(x) = \log x + \dfrac{1}{x^{1/3}}$.

a) Determinatene dominio, limiti agli estremi del dominio, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo o minimo locale, intervalli di concavità e convessità. Disegnate il grafico di f.

b) Scrivete l'equazione della retta tangente al grafico di f in corrispondenza del punto di flesso.

c) Trovate per quali valori del parametro $\alpha > 0$ la funzione $f_\alpha(x) = \log x + \dfrac{1}{x^\alpha}$ ha estremo inferiore negativo.

Dominio $(f) =]0, +\infty[$

LIMITI AGLI ESTREMI

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\left(x^{1/3}\log x + 1\right) = +\infty \cdot \left(0^- + 1\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\log x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = +\infty + 0^+ = +\infty$$

Quindi, per il Corollario del Teorema di Weierstrass, esiste $x_m \in]0,+\infty[\;:\; f(x_m) = \min f(]0,+\infty[)$

REGIONI DI MONOTONIA

$$f' = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}\right)^{4/3} = \left(\frac{1}{x}\right)^{4/3}\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{3}\right) = 0$$

sse $x = x_m = \dfrac{1}{27}$

$$f' \begin{cases} < 0 & 0 < x < 1/27 \\ > 0 & 1/27 < x \end{cases} \Rightarrow x_m = 1/27 \text{ p.to di minimo assoluto}$$

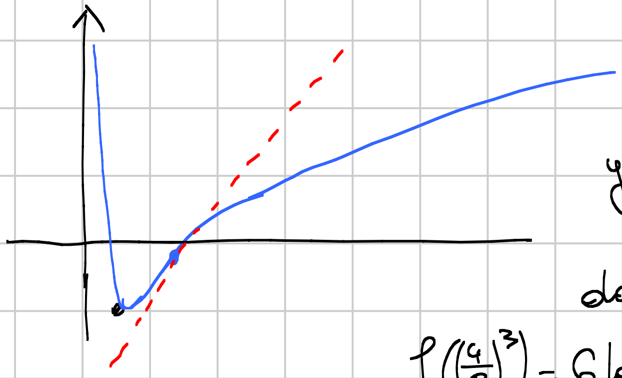
$$f(x_m) = f(1/27) = \log\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{27}}} = -3\log 3 + 3 < 0$$

CONCAVITÀ / CONVESSITÀ

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}\right)^{4/3}\right)' = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{3}\left(-\frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^{7/3}$$

$$= \left(\frac{1}{x}\right)^{7/3}\left(-\sqrt[3]{x} + \frac{4}{9}\right) = 0 \text{ sse } x_f = \left(\frac{4}{9}\right)^3$$

f convessa su $]0, \left(\frac{4}{9}\right)^3[$, concava su $]\left(\frac{4}{9}\right)^3, +\infty[$



L'equazione della retta tangente è

$$y = f\left(\left(\tfrac{4}{9}\right)^3\right) + f'\left(\left(\tfrac{4}{9}\right)^3\right)\cdot\left(x - \left(\tfrac{4}{9}\right)^3\right)$$

dove

$$f\left(\left(\tfrac{4}{9}\right)^3\right) = 6\log\frac{2}{3} + \left(\frac{9}{4}\right)^3$$

$$f'\left(\left(\tfrac{4}{9}\right)^3\right) = \left(\frac{9}{4}\right)^3 - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^4 = \left(\frac{9}{4}\right)^3\left(1-\frac{3}{4}\right) = \frac{9^3}{4^4}$$

Il parametro $\alpha > 0$

$f(x) = \log x + \dfrac{1}{x^\alpha}$ ha lo stesso andamento

visto prima, ma cambia la posizione del punto di minimo ed il suo valore

$$f' = \frac{1}{x} - \alpha\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha+1} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha+1}(x^\alpha - \alpha) = 0 \text{ se } x_\alpha = \alpha^{1/\alpha}$$

$$f(x^\alpha) = f(\alpha^{1/\alpha}) = \frac{1}{\alpha}\log\alpha + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}(\log\alpha + 1) = \min f(]0,+\infty[)$$

e quindi $f(x_\alpha) < 0$ se $\log\alpha + 1 < 0$ se $\alpha < 1/e$

Considerate la funzione $f(x) = x\arctan\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)$.

a) Determinate la primitiva di f che si annulla in $x_0 = 2$.

b) Calcolate l'area dell'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ y \le 0,\ y \ge f(x)\}$.

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2}\cdot\frac{x+2-x+2}{(x+2)^2} = \frac{4}{2x^2+8} = \frac{2}{x^2+4}$$

Integrando per parti

$$\int f(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x-2}{x+2} - \int \frac{x^2}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{x^2+4}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{x+2}\right) - \int\frac{x^2+4}{x^2+4}\,dx + \int\frac{4\,dx}{x^2+4}$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{x+2}\right) - x + 2\int\frac{\frac{1}{2}\,dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{x+2}\right) - x + 2\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Vogliamo la primitiva t.c. $F(2)=0$

$$F(2) = \frac{4}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{0}{4}\right) - 2 + 2\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{2}\right) + c = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{c = 2 - \frac{\pi}{2}}$$

e la primitiva $\boxed{\tilde{F}(x) = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{x+2} - x + 2\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + 2 - \frac{\pi}{2}}$

Quando $0 < x < 2$ $\quad \operatorname{arctg}\frac{x-2}{x+2} < 0$

$$-x + 2\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + 2 - \frac{\pi}{2} < 0$$

e dunque $\tilde{F}(x) < 0 \quad x \in]0,2[$, dunque l'area cercata è

$$-\int_0^2 f(x)dx = -\left[\tilde{F}(x)\right]_0^2 = \tilde{F}(0) - \tilde{F}(2) = 2 - \frac{\pi}{2}$$