Prova scritta di Analisi Matematica 1 del 10 settembre 2014

Soluzioni 1° parte: quiz a risposta multipla

Esercizio 1. Se $z = 2 - i$ e $w = \dfrac{|z|^2 - 3i\bar{z}}{2iz - 2}$ allora

(A) $\Im w = -2$.	(C) $\Im w = 2$.
(B) $\Re w = -2$.	(D) $\Re w = 2$.

$$w = \frac{|2-i|^2 - 3i(2+i)}{2i(2-i) - 2} \Rightarrow w = \frac{(2-i)(2+i) - 6i + 3}{4i + \cancel{2} - \cancel{2}} \cdot \frac{-i}{-i}$$

$$\Rightarrow w = \frac{(4+1+3-6i)\cdot(-i)}{4} \Rightarrow w = -\frac{\cancel{6}^{\,3}}{\cancel{4}_{\,2}} - 2i$$

ovvero $\Re w = -\frac{3}{2}$ $\Im w = -2$; la risposta corretta è la (A)

Esercizio 2. Siano $f(x) = \log(1 - 2x^2)$ e $g(x) = \operatorname{sen}(2x^2)$. Quale tra le seguenti affermazioni è **FALSA**?

(A) $f(x) - g(x) = o(x^2)$.	(C) $f(x) \cdot g(x) = -4x^4 + o(x^5)$.
(B) $f(x) + g(x) = o(x^3)$.	(D) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -1$.

Gli sviluppi di ordine 3 di f e g centrati in $x_0 = 0$ sono dati da

$$f(x) = -2x^2 + o(x^3) \qquad g(x) = 2x^2 + o(x^4) = 2x^2 + o(x^3), \quad x \to 0$$

$$f(x) - g(x) = -4x^2 + o(x^3) \Rightarrow \text{(A) è FALSA}$$

$$f(x) + g(x) = o(x^3) \Rightarrow \text{(B) è vera}$$

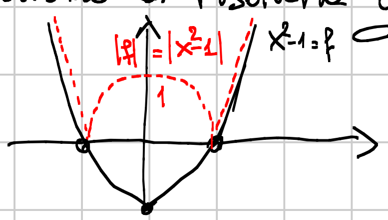
$$f(x) \cdot g(x) = -4x^4 + o(x^5) \Rightarrow \text{(C) è vera}$$

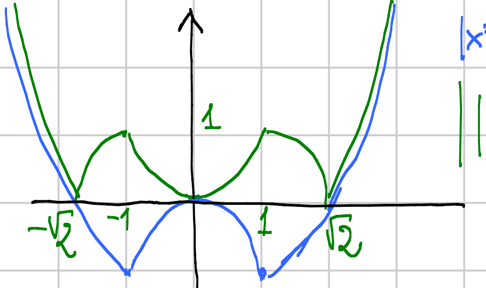
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x^2 + o(x^3)}{2x^2 + o(x^4)} = -1 \Rightarrow \text{(D) è vera}$$

Esercizio 3. Sia $k \in \mathbb{R}$. L'equazione $\big|1 - |x^2 - 1|\big| = k$

(A) ha sei soluzioni per $0 < k < 1$.	(C) ha quattro soluzioni per $k = 0$.
(B) ha cinque soluzioni per $k = 1$.	(D) non ha soluzioni per $k > 1$.

Proviamo a risolverla graficamente

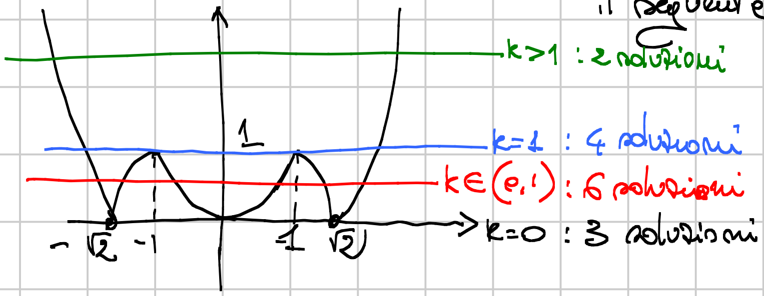




$|x^2-1|-1 = g$

$\left||x^2-1|-1\right| = \left|1-|x^2-1|\right| = |g| = h$

e dunque il grafico della funzione $h = \left|1-|x^2-1|\right|$ è il seguente



Ne segue che la risposta corretta è la A)

Esercizio 4. In quale delle seguenti potenze di binomio compare il termine $-40a^2b^3$?

(A) $(2a-b)^5$.	(C) $(2a+b)^5$.
(B) $(a-2b)^5$.	(D) $(2a-b)^7$.

(C) non può essere poiché tutti i termini dello sviluppo hanno segno positivo

(D) non può essere poiché tutti i termini dello sviluppo hanno grado 7, e $-40a^2b^3$ ha invece grado 5 (a compare con grado 2 e b con grado 3)

(A) $$(2a-b)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} (2a)^k (-b)^{5-k} = \dots + \binom{5}{2}\cdot(2a)^2\cdot(-b)^3 + \dots$$

$$= \dots + \left[\frac{5!}{2!\,3!}\cdot 4a^2\,(-b^3)\right] + \dots$$

$$= \dots + \left[-40\,a^2 b^3\right] + \dots$$

(B) $$(a-2b)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} a^k (-2b)^{5-k} = \dots + \binom{5}{2}\cdot a^2 (-8b^3) + \dots$$

$$= \dots + \left[-80\,a^2 b^3\right] + \dots$$

e dunque la risposta corretta è la (A)

Esercizio 5. Il limite $\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} 2x)^{-1/3x}$ è uguale a

(A) $e^{-2/3}$.	(C) $e^{-1/3}$.
(B) $e^{-3/2}$.	(D) 1.

$$(1+\operatorname{sen} 2x)^{-\frac{1}{3x}} = e^{-\frac{1}{3x}\log(1+\operatorname{sen} 2x)} \xrightarrow[x\to 0]{} e^{-2/3}$$

infatti $$\lim_{x\to 0} -\frac{\log(1+\operatorname{sen}2x)}{3x} = -\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\operatorname{sen}2x)}{\operatorname{sen}2x}\cdot\frac{\operatorname{sen}2x}{2x}\,\frac{2x}{3x}$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\operatorname{sen}2x)}{\operatorname{sen}(2x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}2x}{2x}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}$$

$$= -1\cdot 1\cdot \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$$

Dunque la risposta corretta è la (A)

Esercizio 6. Sia $f(x) = x^3 - 12x + 1$; allora

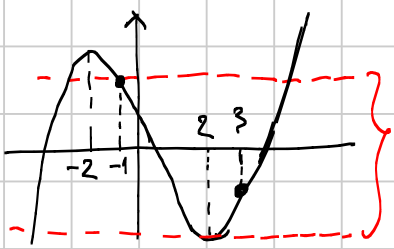
(A) $f([-1,3]) = [-15,12]$.	(C) $f([-1,3]) = [-8,12]$.
(B) $f([-1,3]) = [-15,17]$.	(D) $f([-1,3]) = [-10,10]$.

La funzione $f(x)$ è un polinomio definito su $\mathbb{R}$, dunque è continua su $\mathbb{R}$ ed ivi derivabile.
Inoltre $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $f(0)=1$
Essendo f continua su $\mathbb{R}$ intervallo, anche $f(\mathbb{R})$ è un intervallo e - visti i valori dei limiti agli estremi - $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$
Per studiare la monotonia osservo che $f(x) = x^3-12x+1$ e dunque $f'(x) = 3x^2-12$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} >0 & x<-2 \\ <0 & -2\le x\le 2 \\ >0 & 2<x \end{cases}$$

Dunque $f(-2) = -8+24+1 = 17$ max relativo interno
$f(2) = 8-24+1 = -15$ min " "
$f(-1) = -1+12+1 = 12$
$f(3) = 27-36+1 = -8$

ovvero



$f([-1,3]) = [-15,12]$

e la risposta corretta è la (A)

4

Esercizio 7. Sia $\alpha > 0$. L'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{2\alpha} + e^x}\, dx$

(A) converge per ogni $\alpha > 0$.

(B) diverge a $+\infty$ per ogni $\alpha > 0$.

(C) converge se e solo se $\alpha > 1/2$.

(D) non esiste.

$f(x) = \frac{1}{x^{2\alpha}+e^x}$ è continua e derivabile $\forall x \in [0,+\infty[$

(infatti $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \quad \forall \alpha > 0$)

Si tratta dunque di studiare $f(x)$ quando $x \to +\infty$

e si ha

$$f(x) = \frac{1}{x^{2\alpha}+e^x} \leq \frac{1}{e^x} = e^{-x} = g(x) \quad \forall x \geq 0 \quad \forall \alpha > 0$$

Ma

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = \lim_{z\to+\infty} \int_0^z e^{-x}\, dx = \lim_{z\to+\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^z = 1$$

e dunque, per il criterio del confronto,

si avrà $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx \in \mathbb{R} \quad \forall \alpha > 0$

ovvero la risposta corretta è la (A)

Soluzioni della 2ª parte: esercizi a risposta aperta

Determinate le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^3 = (-1 + i\sqrt{3})\bar{z}\,.$$

Passando ai moduli si ottiene $|z|^3 = |-1+i\sqrt{3}|\cdot|\bar{z}|$

e quando $z \neq 0$, essendo $|z| = |\bar{z}|$, si ha $|z|^2 = |-1+i\sqrt{3}|$

ovvero $\boxed{|z|^2 = 2}$ (*)

Dall'equazione $z^3 = (-1+i\sqrt{3})\bar{z}$, moltiplicando ambo i membri per z si ottiene

$$\begin{aligned} z^4 &= (-1+i\sqrt{3})\,\bar{z}\,z \\ &\overset{!}{=} (-1+i\sqrt{3})\,|z|^2 \\ &\overset{!}{=} 2(-1+i\sqrt{3}) \\ &\overset{!}{=} 4\left(-\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &\overset{!}{=} 4\left(\cos \tfrac{2}{3}\pi + i \operatorname{sen} \tfrac{2}{3}\pi\right) \end{aligned}$$

Restano da calcolare le radici 4 ovvero

$$z_i = \sqrt[4]{4}\left(\cos\left(\frac{2}{12}\pi + k\frac{2\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}\right)\right) \qquad i = 0,1,2,3$$

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \qquad z_2 = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad z_3 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

a cui va aggiunta la soluzione $z_5 = 0$

Metodo alternativo: posto $z = x+iy$ si ottiene

$$(x+iy)^3 = (-1+i\sqrt{3})(x-iy)$$

$$x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 = -x + iy + i\sqrt{3}x + \sqrt{3}y$$

che equivale al sistema reale

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 + x - \sqrt{3}y = 0 \\ +3x^2y - y^3 - y - \sqrt{3}x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(x^2-3y^2) + (x-\sqrt{3}y) = 0 \\ y(3x^2-y^2) - (\sqrt{3}x+y) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (x-\sqrt{3}y)\left[x(x+\sqrt{3}y)+1\right] = 0 \\ (\sqrt{3}x+y)\left[y(\sqrt{3}x-y)-1\right] = 0 \end{cases}$$

① $\begin{cases} x-\sqrt{3}y=0 \\ \sqrt{3}x+y=0 \end{cases} \Rightarrow z=0+i0$ è soluzione

② $\begin{cases} x=\sqrt{3}y \\ \sqrt{3}(\sqrt{3}y)\cdot y-y^2-1=0 \end{cases} \begin{cases} '' \\ 2y^2=1 \end{cases} \begin{cases} x=\sqrt{3}\cdot\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$z_2=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}} \qquad z_3=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}$

③ $\begin{cases} y=-\sqrt{3}x \\ x^2+\sqrt{3}(-\sqrt{3}x)x+1=0 \end{cases} \begin{cases} '' \\ -2x^2+1=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} y=\mp\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix}$

$z_4=\frac{1}{\sqrt{2}}-i\sqrt{\frac{3}{2}} \qquad z_5=-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\sqrt{\frac{3}{2}}$

Determinate per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^{\alpha^2}}{n^4+(\alpha-2)^{2n}}.$$

$$a_n=\frac{n^{\alpha^2}}{n^4+(\alpha-2)^{2n}}$$

- Quando $(\alpha-2)^2\leq 1$, ovvero quando $|\alpha-2|\leq 1$
  $\qquad\qquad\qquad\qquad ''\qquad\qquad '' \qquad 1\leq\alpha\leq 3$

si ha che, per $n\to+\infty$

$$a_n\sim\frac{n^{\alpha^2}}{n^4}=\frac{1}{n^{4-\alpha^2}}$$

Ma $\sum_n \frac{1}{n^{4-\alpha^2}}$ converge se $4-\alpha^2>1$ se $-\sqrt{3}<\alpha<\sqrt{3}$

Dunque, per il criterio del confronto asintotico, $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge quando $\alpha\in\left]-\sqrt{3},\sqrt{3}\right[\cap[1,3]$

$\qquad\qquad\qquad ''\qquad\qquad '' \qquad \alpha\in\left[1,\sqrt{3}\right[$

- Quando $(\alpha-2)^2>1$, ovvero quando $\alpha\in\left]-\infty,1\right[\cup\left]3,+\infty\right[$
  si ha che

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n^{\alpha^2}}}{\sqrt[n]{(\alpha-2)^{2n}+n^4}} = \frac{\sqrt[n]{n^{\alpha^2}}}{|\alpha-2|^2\sqrt[n]{1+\frac{n^4}{(\alpha-2)^{2n}}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{|\alpha-2|^2}$$

Dunque $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{|\alpha-2|^2} < 1$, dato che $|\alpha-2|>1$

e quindi $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge per il criterio della radice quando $\alpha\in\,]-\infty,1[\,\cup\,]3,+\infty[$

Riassumendo $\sum_n a_n$ converge se

$\alpha\in\left(]-\infty,1[\,\cup\,]3,+\infty[\right)\cup[1,\sqrt{3}[$

cioè converge se

$\alpha\in\,]-\infty,\sqrt{3}[\,\cup\,]3,+\infty[$

PROBLEMA 3

Calcolate lo sviluppo di Taylor di ordine 3, centrato in $x_0=0$, dell'infinitesimo

$$f(x)=e^{-x+x^2}-\frac{1}{1+x-x^2}.$$

Calcolate poi, al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$, il limite

$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-x+x^2}-(1+x-\alpha x^2)^{-1}}{x^3}.$$

Sappiamo che $e^y = 1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+o(y^3) \quad y\to0$

da cui si deduce
$$e^{-x+x^2} = 1+(-x+x^2)+\frac{1}{2}(-x+x^2)^2+\frac{1}{6}(-x+x^2)^3+o(x^3)$$
$$= 1-x+x^2+\frac{1}{2}x^2-x^3-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$
$$= 1-x+\frac{3}{2}x^2-\frac{7}{6}x^3+o(x^3)$$

Analogamente
$$\frac{1}{1-y} = 1+y+y^2+y^3+o(y^3) \quad y\to0$$

da cui si deduce
$$\frac{1}{1-(x^2-x)} = 1+(x^2-x)+(x^2-x)^2+(x^2-x)^3+o(x^3) \quad x\to0$$
$$= 1-x+x^2+x^2-2x^3-x^3+o(x^3)$$
$$= 1-x+2x^2-3x^3+o(x^3)$$

Dunque $f(x) = e^{-x+x^2}-\frac{1}{1-x^2+x} = -\frac{x^2}{2}+\frac{11}{6}x^3+o(x^3) \quad x\to0$

Analogamente
$$\frac{1}{1+(x-\alpha x^2)} = 1-(x-\alpha x^2)+(x-\alpha x^2)^2-(x-\alpha x^2)^3+o(x^3)$$
$$= 1-x+\alpha x^2+x^2-2\alpha x^3-x^3+o(x^3)$$
$$= 1-x+(\alpha+1)x^2-(2\alpha+1)x^3+o(x^3)$$

$$\lim_{x\to 0}\left(e^{-x+x^2}-\frac{1}{1+x-\alpha x^2}\right)\cdot\frac{1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{7}{6}x^3-(\alpha+1)x^2+(2\alpha+1)x^3+o(x^3)\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(x^2\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)+x^3\left(2\alpha-\frac{1}{6}\right)+o(x^3)\right)$$

$$=\begin{cases}+\infty, & \text{se } \alpha<\frac{1}{2}\\ \frac{5}{6}, & \text{se } \alpha=\frac{1}{2}\\ -\infty, & \text{se } \alpha>\frac{1}{2}\end{cases}$$

Oss: Nella seconda parte si poteva procedere in modo $\neq$ osservando che

$$\frac{e^{-x+x^2}-(1+x-\alpha x^2)^{-1}}{x^3}=\frac{e^{-x+x^2}\cdot(1+x-\alpha x^2)-1}{x^3(1+x-\alpha x^2)}$$

$$=\frac{\left(1-x+\frac{3}{2}x^2-\frac{7}{6}x^3\right)(1+x-\alpha x^2)-1+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}$$

$$=\frac{\cancel{1}+\cancel{x}-\alpha x^2-\cancel{x}-x^2+\alpha x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x^3-\frac{7}{6}x^3-\cancel{1}+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)x^2+x^3\left(\alpha+\frac{3}{2}-\frac{7}{6}\right)+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}\xrightarrow[x\to 0]{}\begin{cases}+\infty & \alpha<\frac{1}{2}\\ \frac{5}{6} & \alpha=\frac{1}{2}\\ -\infty & \alpha>\frac{1}{2}\end{cases}$$

PROBLEMA 4

Provate che per ogni $x>0$ si ha $\log x \geq 1-1/x$.
Dopo averne eseguito uno studio, tracciate un grafico della funzione

$$f(x)=\frac{|\log x|+\log|x|}{|x|-1}.$$

È noto che $\log t \leq t-1 \quad \forall t>0$

Posto $t=\frac{1}{x}$, se ne deduce che $\log\frac{1}{x}\leq\frac{1}{x}-1 \quad \forall x>0$

da cui segue

$$-\log x \leq \frac{1}{x}-1 \quad \forall x>0$$

e infine

$$\log x \geq 1-\frac{1}{x} \quad \forall x>0$$

Oppure si prende $g(x)=\log x-1+\frac{1}{x}=\frac{x\log x-x+1}{x}$

e si ha $\lim_{x\to 0^+} g=+\infty=\lim_{x\to+\infty} g(x)$

Inoltre $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} \begin{cases} <0 & x\in(0,1) \\ >0 & x\in(1,0) \end{cases}$

ma $g(1) = 0$

$$\Rightarrow g(1) = \min_{x\in]0,+\infty[} g(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x) = \log x - 1 + \frac{1}{x} \geq 0 = g(1) \quad \forall x > 0$$

che è quanto si voleva provare

$f(x) = \frac{1}{(|x|-1)}\left(|\log x| + \log|x|\right)$ è definita $\forall x>0,\ x\neq 1$

dunque $f(x) = \frac{|\log x| + \log x}{x-1}$

$\boxed{\text{Segno}}$ $\forall x\in(0,1)$ $\quad |\log x| + \log x = -\log x + \log x = 0$

$\forall x > 1$ $\quad \left.\begin{array}{l} |\log x| + \log x = 2\log x > 0 \\ x-1 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f > 0$

$\boxed{\text{LIMITI ESTREMI DOMINIO}}$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{2\log x}{x-1} = 2$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\log x}{x-1} = 0^+$$

$\boxed{\text{MONOTONIA}}$

$$f'(x) = \frac{2}{x(x-1)} - \frac{2\log x}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}\cdot\left(\log x - \frac{x-1}{x}\right)$$

$$= -\frac{2}{(x-1)^2}\left(\log x - 1 + \frac{1}{x}\right) < 0 \quad \forall x > 1$$

$\boxed{\text{GRAFICO}}$

Tirando le somme si ottiene