Risoluzione del compito n. 7 (Settembre 2014/2)

PROBLEMA 1

Determinate tutte le soluzioni (z, w), con $z, w \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} 2z^2 - 3iz = |w|^2 \\ w^4 = z^4 \, . \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava subito che $|w|^4 = |z|^4$, quindi $|w| = |z|$ e la prima si riscrive

$$2z^2 - 3iz = |z|^2 \, .$$

Ricordando che $|z|^2 = z\bar{z}$ possiamo passare a

$$2z^2 - 3iz = z\bar{z} \quad \Longleftrightarrow \quad z(2z - 3i - \bar{z}) = 0 \, . \tag{1}$$

Trattandosi di un prodotto, questo si annulla se e solo se almeno uno dei due fattori è nullo, quindi o $z = 0$ oppure

$$2z - \bar{z} = 3i \, .$$

Si potrebbe evitare, ma è molto rapido passare a $z = a + ib$ che dà

$$a + 3ib = 3i \quad \Rightarrow \quad a = 0 \, , \quad b = 1 \quad \Rightarrow \quad z = i \, .$$

Allora le soluzioni della (1) sono $z = 0$ e $z = i$. Per determinare i valori di w risolviamo in ciascuno dei due casi l'equazione $w^4 = z^4$:

$$\begin{cases} \text{se } z = 0, \ w^4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad w = 0 \\ \text{se } z = i, \ w^4 = i^4 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad w^2 = \pm 1 \quad \Longleftrightarrow \quad w = \pm 1, \pm i \, . \end{cases}$$

In definitiva le cinque soluzioni (z, w) del sistema sono

$$(0, 0) \, , \quad (i, 1) \, , \quad (i, -1) \, , \quad (i, i) \, , \quad (i, -i) \, .$$

PROBLEMA 2

Trovate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ ordine e parte principale di infinitesimo per $x \to 0$ della funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 + x + \alpha x^2} - \cos\sqrt{2x}\ .$$

Usando l' informazione precedente, studiate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il carattere della serie

$$\sum_n \left| \frac{n^2}{n^2 + n + \alpha} - \cos\sqrt{\frac{2}{n}}\ \right|^{1/2} .$$

Usiamo gli sviluppi noti

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + o(t^3)\ , \qquad \cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^6}{720} + o(t^6)\ .$$

Osservando che per qualunque α è $x + \alpha x^2 = x + o(x)$ e quindi $o(x + \alpha x^2)^k = o(x^k)$, ricaviamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + x + \alpha x^2} &= 1 - (x + \alpha x^2) + (x + \alpha x^2)^2 - (x + \alpha x^2)^3 + o(x^3) \\ &= 1 - x - \alpha x^2 + x^2 + 2\alpha x^3 - x^3 + o(x^3) \\ &= 1 - x + (1 - \alpha)x^2 + (2\alpha - 1)x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

e

$$\cos\sqrt{2x} = 1 - \frac{2x}{2} + \frac{4x^2}{24} - \frac{8x^3}{720} + o(x^3) = 1 - x + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{90} + o(x^3)\ .$$

Da qui otteniamo

$$f(x) = \Big(\frac{5}{6} - \alpha\Big)x^2 + \Big(2\alpha - \frac{89}{90}\Big)x^3 + o(x^3)\ :$$

allora se $\alpha \neq 5/6$ la funzione f è un infinitesimo di ordine 2, con parte principale $[(5/6) - \alpha]x^2$, mentre se $\alpha = 5/6$ il coefficiente del termine di grado 2 si annulla, mentre quello del termine di ordine 3 vale $(150 - 89)/90 = 61/90$, quindi f è in tal caso un infinitesimo di ordine 3 con parte principale $61x^3/90$.
Ora, il termine generale della serie si può riscrivere come

$$a_n = \left| \frac{1}{1 + (1/n) + \alpha(1/n)^2} - \cos\sqrt{2(1/n)} \right|^{1/2} = \sqrt{|f(1/n)|}\ ,$$

pertanto se $\alpha \neq 5/6$ si ha $\sum a_n \sim \sum 1/n$, che diverge, e per $\alpha = 5/6$ si ha $\sum a_n \sim \sum (1/n)^{3/2}$, che converge, ovvero la serie converge soltanto per $\alpha = 5/6$.

PROBLEMA 3

Calcolate l' integrale generalizzato

$$\int_{8}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\,\mathrm{e}^{-t^{2/3}}\,dt\ .$$

Osserviamo che

$$D[\mathrm{e}^{-t^{2/3}}] = \mathrm{e}^{-t^{2/3}} \cdot \left(-\frac{2}{3}t^{-1/3}\right) = -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{t}}\,\mathrm{e}^{-t^{2/3}}\ ,$$

quindi senza fatica una primitiva della funzione integranda è

$$-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-t^{2/3}}\ .$$

Allora per ogni $M > 8$

$$\int_{8}^{M} \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\,\mathrm{e}^{-t^{2/3}}\,dt = \left[-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-t^{2/3}}\right]_{8}^{M} = \frac{3}{2}[\mathrm{e}^{-4} - \mathrm{e}^{-M^{2/3}}]\ ,$$

quindi

$$\int_{8}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\,\mathrm{e}^{-t^{2/3}}\,dt = \lim_{M\to+\infty}\int_{8}^{M} \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\,\mathrm{e}^{-t^{2/3}}\,dt = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-4}\ .$$

PROBLEMA 4

Sia $f(x) = x\,\mathrm{e}^{1/(x^2-4)}$.

a) **Trovatene il dominio, il segno, la derivata prima $f'(x)$, i limiti di f e di f' agli estremi del dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia e i punti di massimo e/o minimo locale. Tracciate poi un grafico di f .**

b) **Determinate, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.**

Per quanto riguarda il dominio, dobbiamo solo accertarci che il denominatore dell'esponente non si annulli:

$$x^2 - 4 \neq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \neq \pm 2$$

e il dominio è $\mathbb{R}\setminus\{\pm 2\}$. L'esponenziale è sempre positivo, quindi f è positiva per $x > 0$ (con $x \neq 2$) e negativa nell'altra metà del dominio. Osserviamo che la funzione è dispari, quindi potremo ricavare alcune informazioni una volta sola. Per $x \to +\infty$ l'argomento dell'esponenziale tende a zero, quindi l'esponenziale tende a 1 e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ , \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \ .$$

Osserviamo subito che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{1/(x^2-4)} = 1 \ ,$$

quindi potrebbe esserci un asintoto obliquo con coefficiente angolare $m = 1$, e in effetti

$$f(x) - mx = x\big(\mathrm{e}^{1/(x^2-4)} - 1\big) = \frac{\mathrm{e}^{1/(x^2-4)} - 1}{1/(x^2-4)} \cdot \frac{x}{x^2-4} \to 1 \cdot 0 = 0 \ ,$$

quindi l'asintoto obliquo c'è (sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$) ed ha equazione $y = x$. Attenzione: se per $x \to +\infty$ l'asintoto di una funzione dispari avesse avuto equazione $y = mx + q$, per $x \to -\infty$ avrebbe avuto equazione $y = mx - q$! Riprendiamo con i limiti di f ; per $x \to 2$ occorre distinguere due casi:

$$\begin{cases} x \to 2^+ \Rightarrow (x^2-4) \to 0^+ \Rightarrow 1/(x^2-4) \to +\infty \Rightarrow \mathrm{e}^{1/(x^2-4)} \to +\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty \\ x \to 2^- \Rightarrow (x^2-4) \to 0^- \Rightarrow 1/(x^2-4) \to -\infty \Rightarrow \mathrm{e}^{1/(x^2-4)} \to 0^+ \Rightarrow f(x) \to 0^+ \end{cases}$$

da cui

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty \ , \qquad \lim_{x\to(-2)^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0^+ \ , \qquad \lim_{x\to(-2)^+} f(x) = 0^- \ .$$

La derivata di f (che sarà una funzione pari) è

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^{1/(x^2-4)} + x\mathrm{e}^{1/(x^2-4)} \cdot \frac{-1}{(x^2-4)^2} \cdot 2x = \mathrm{e}^{1/(x^2-4)} \frac{(x^2-4)^2 - 2x^2}{(x^2-4)^2} \\ &= \mathrm{e}^{1/(x^2-4)} \frac{x^4 - 10x^2 + 16}{(x^2-4)^2} \ . \end{aligned}$$

Posto $t = x^2$ vediamo che

$$t^2 - 10t + 16 = 0 \iff t = 5 \pm \sqrt{25 - 16} = \begin{cases} 8 \\ 2 \end{cases}$$

e quindi (limitandoci a $t \geq 0$ dato che $t = x^2$)

$$t^2 - 10t + 16 < 0 \iff 2 < t < 8 \,, \qquad t^2 - 10t + 16 > 0 \iff 0 \leq t < 2 \,,\ t > 8 \,.$$

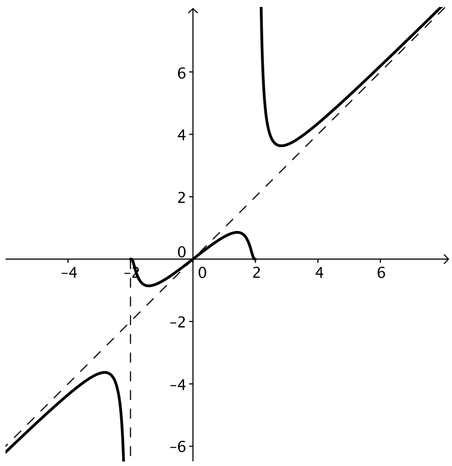
Tradotto in termini di x , ricordando che ± 2 non appartengono al dominio e che f è dispari, abbiamo

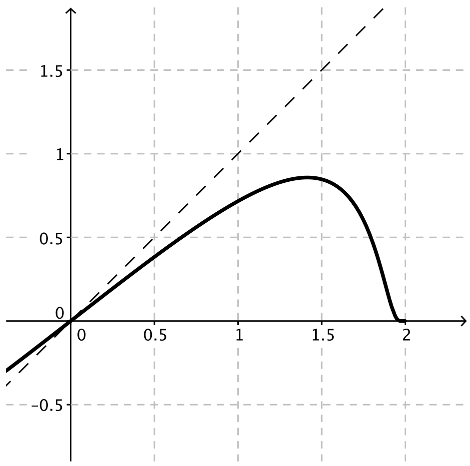
$$\begin{aligned}
x \geq 2\sqrt{2} &\Rightarrow f \text{ è crescente} \\
2 < x \leq 2\sqrt{2} &\Rightarrow f \text{ è decrescente} \\
\sqrt{2} \leq x < 2 &\Rightarrow f \text{ è decrescente} \\
-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} &\Rightarrow f \text{ è crescente} \\
-2 < x \leq -\sqrt{2} &\Rightarrow f \text{ è decrescente} \\
-2\sqrt{2} \leq x < -2 &\Rightarrow f \text{ è decrescente} \\
x \leq -2\sqrt{2} &\Rightarrow f \text{ è crescente.}
\end{aligned}$$

I punti $x = -\sqrt{2}$ e $x = 2\sqrt{2}$ sono di minimo locale, i punti $x = -2\sqrt{2}$ e $x = \sqrt{2}$ di massimo locale, e si ha

$$f(2\sqrt{2}\,) = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{1/(8-4)} = 2\sqrt{2}\sqrt[4]{\mathrm{e}} \Rightarrow f(-2\sqrt{2}\,) = -2\sqrt{2}\sqrt[4]{\mathrm{e}}$$

$$f(\sqrt{2}\,) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{1/(2-4)} = \sqrt{2/\mathrm{e}} \Rightarrow f(-\sqrt{2}\,) = -\sqrt{2/\mathrm{e}} \,.$$





Il grafico a destra mostra un particolare di come si comporta f vicino a $x = 2$. Calcoliamo i limiti di f' :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 2^-} f'(x) &= \lim_{x \to 2^-} \mathrm{e}^{1/(x^2-4)} \frac{x^4 - 10x^2 + 16}{(x^2-4)^2} = -8 \lim_{x \to 2^-} \left(\frac{1}{x^2-4}\right)^2 \mathrm{e}^{1/(x^2-4)} \\
&= -8 \lim_{t \to -\infty} t^2 \mathrm{e}^t = 0^- \,,
\end{aligned}$$

quindi anche

$$\lim_{x\to(-2)^+} f'(x) = 0^- \ .$$

Per gli altri limiti la situazione è più semplice:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4-10x^2+16}{(x^2-4)^2} = 1 \ ,$$

$$\lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to(-2)^-} f'(x) = -8 \lim_{x\to 2^+} \left(\frac{1}{x^2-4}\right)^2 \mathrm{e}^{1/(x^2-4)} = -\infty \ .$$

In ciascuno degli intervalli di monotonia la funzione f è strettamente monotona, ed assume una e una sola volta ogni valore fra estremo inferiore (o minimo) e superiore (o massimo). Ad esempio in $]-\infty, -2\sqrt{2}]$ assume una ed una sola volta ogni valore compreso in $]-\infty, -2\sqrt{2}\sqrt[4]{\mathrm{e}}]$. Ragionando allo stesso modo negli altri intervalli si ottiene che l'equazione $f(x)=k$ ha:

due soluzioni se $k < -2\sqrt{2}\sqrt[4]{\mathrm{e}}$
una soluzione se $k = -2\sqrt{2}\sqrt[4]{\mathrm{e}}$
zero soluzioni se $-2\sqrt{2}\sqrt[4]{\mathrm{e}} < k < -\sqrt{2/\mathrm{e}}$
una soluzione se $k = -\sqrt{2/\mathrm{e}}$
due soluzioni se $-\sqrt{2/\mathrm{e}} < k < 0$
una soluzione se $k = 0$
due soluzioni se $0 < k < \sqrt{2/\mathrm{e}}$
una soluzione se $k = \sqrt{2/\mathrm{e}}$
zero soluzioni se $\sqrt{2/\mathrm{e}} < k < 2\sqrt{2}\sqrt[4]{\mathrm{e}}$
una soluzione se $k = 2\sqrt{2}\sqrt[4]{\mathrm{e}}$
due soluzioni se $k > 2\sqrt{2}\sqrt[4]{\mathrm{e}}$.

Esercizio 1. Se $z = 1 - \mathrm{i}$ e $w = \dfrac{|z|^2 - 3\mathrm{i}\bar{z}}{\mathrm{i}z - 1}$ allora

(A) $\Im w = -5$.	(C) $\Im w = 5$.
(B) $\Re w = -5$.	(D) $\Re w = 5$.

Abbiamo $|z|^2 = 2$, quindi

$$w = \frac{2 - 3\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{\mathrm{i}(1-\mathrm{i}) - 1} = \frac{2 - 3\mathrm{i} + 3}{\mathrm{i}} = \frac{5 - 3\mathrm{i}}{\mathrm{i}} = -3 + \frac{5}{\mathrm{i}} = -3 - 5\mathrm{i} ,$$

e la parte immaginaria di w è -5 .

Esercizio 2. In una tavola rotonda con 16 posti si siedono a caso 16 persone, tra cui Aldo, Bruno e Carlo. Qual è la probabilità che Aldo e Bruno siano seduti uno di fianco all'altro mentre nessuno dei due è seduto di fianco a Carlo?

(A) $4/35$.	(C) $2/15$.
(B) $13/16$.	(D) $1/55$.

Dato che la tavola è rotonda, dove si siede Aldo è indifferente. Una volta che si è seduto, Bruno può occupare una delle 15 posizioni rimanenti e Carlo una delle 14 restanti, poi si siedono a caso gli altri, quindi i casi possibili sono $15 \cdot 14 \cdot 13!$. Contiamo i casi favorevoli: Bruno ha solo due scelte, sedere a destra o a sinistra di Aldo. Per ciascuna di queste scelte, Carlo si può sedere in uno dei posti rimanenti (che sono 14) con esclusione dei due adiacenti a Bruno e Aldo, quindi ha 12 scelte. Di nuovo, poi si siedono a caso gli altri: i casi favorevoli sono dunque $2 \cdot 12 \cdot 13! = 24 \cdot 13!$ e la probabilità è $24/(15 \cdot 14) = 4/(5 \cdot 7) = 4/35$.

Esercizio 3. Sia $f(x) = \begin{cases} a\,\mathrm{e}^{2x} + b \operatorname{sen} x & \text{se } x \geq 0 \\ a \log(1-x) + 7x + 2b & \text{se } x < 0 \end{cases}$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Allora f è derivabile su tutto $\mathbb{R}$

(A) se $a = 2$ e $b = 1$.	(C) se $b = 7/5$ e $a = 2b$.
(B) se $b = 7 - 3a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.	(D) se $a = 7/3$ e $b = 0$.

La funzione f è derivabile in ogni punto $x_0 \neq 0$, dato che in un intorno di x_0 coincide con una delle due funzioni che compaiono nelle righe della definizione di f , e queste sono derivabili in tutti i rispettivi domini. Resta da verificare la derivabilità in $x_0 = 0$. Ricordiamo che una funzione derivabile è necessariamente continua, ma

$$f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = a , \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = 2b ,$$

dunque f è continua in $x_0 = 0$ se e solo se $a = 2b$. Limitandoci a tali valori, cerchiamo di applicare un corollario del Teorema di de l'Hôpital: calcoliamo

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{a}{x-1} + 7 \right) = 7 - a ,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (2a\mathrm{e}^{2x} + b\cos x) = 2a + b \ ,$$

pertanto (sempre ricordando che siamo nel caso $a = 2b$)

$$f'_-(0) = 7 - a \ , \qquad f'_+(0) = 2a + b$$

e la derivata esiste se e solo se $7 - a = 2a + b$. Dunque f è derivabile in zero se e solo se

$$\begin{cases} a = 2b \\ 7 - a = 2a + b \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2b \\ 7 - 2b = 5b \end{cases} \iff \quad b = 1 \ , \ a = 2 \ .$$

Esercizio 4. Se $a_n > 0$ per ogni n e $\sum_n a_n$ converge, quale delle prossime affermazioni è certamente **VERA?**

(A) $\sum_n \log(1 + a_n)$ converge.	(C) $\sum_n a_n^2$ diverge.
(B) $\sum_n \mathrm{e}^{a_n}$ converge.	(D) $\sum_n \frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n}$ converge.

Se $\sum_n a_n$ converge, certamente $a_n \to 0$, pertanto

$$\mathrm{e}^{a_n} \to 1 \ , \qquad \frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n} \to 1$$

e le due serie $\sum_n \mathrm{e}^{a_n}$ e $\sum_n \frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n}$ non possono convergere dato che hanno termine generale non infinitesimo. Dato che $a_n \to 0^+$, definitivamente $0 < a_n < 1$, quindi definitivamente

$$0 < a_n^2 = a_n \cdot a_n < 1 \cdot a_n = a_n \ ,$$

e per il teorema di confronto anche $\sum_n a_n^2$ converge. La risposta che rimane è vera, dato che

$$\frac{\log(1 + a_n)}{a_n} \to 1$$

e si può applicare il criterio del confronto asintotico.

Esercizio 5. Sia S l'insieme delle soluzioni della disequazione $\sqrt{3x^2 + 12x} > x - 4$. Quale tra le seguenti affermazioni è **VERA**?

(A) $]0, 2] \subseteq S$.	(C) S è limitato.
(B) $[-2, 2] \subseteq S$.	(D) $-6 \notin S$.

Risolviamo la disequazione, che equivale a

$$\begin{cases} 3x^2 + 12x \geq 0 \\ x - 4 < 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ 3x^2 + 12x > (x - 4)^2 \ . \end{cases}$$

Le soluzioni del primo sistema sono

$$\begin{cases} 3x(x + 4) \geq 0 \\ x < 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq -4 \ \textbf{o} \ x \geq 0 \\ x < 4 \end{cases} \iff \quad [x \leq -4 \ \textbf{o} \ 0 \leq x < 4]$$

mentre le soluzioni del secondo (che sarebbe inutile cercare, dato che S contiene le soluzioni del primo sistema che già comprendono l' intervallo $]0,2]$) sono

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ 2x^2 + 20x - 16 > 0 \end{cases} \iff x \geq 4$$

(dato che per $x \geq 4$ il trinomio sulla seconda riga è abbondantemente positivo, o se non lo si nota, dato che il trinomio sulla seconda riga ha come radici un numero vicino a -11 e uno vicino a -1 e quindi è sempre positivo per $x \geq 4$), pertanto

$$S =]-\infty, -4] \cup [0, +\infty[$$

che verifica solo l'affermazione $]0,\, 2] \subseteq S$.

Esercizio 6. L' integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x^4 + x^{3\alpha}}\, dx$ converge se e soltanto se $\alpha \in A$. Quale tra le seguenti affermazioni è **FALSA**?

(A) $]-\infty,\, 1/2] = A$.

(B) A è illimitato.

(C) $3 \notin A$.

(D) $]-1/3,\, 1/3[\subseteq A$.

C'è da controllare solo la convergenza vicino a zero. Il numeratore si comporta come x , mentre al denominatore abbiamo due casi: se $4 \leq 3\alpha$, cioè se $\alpha \geq 4/3$, al denominatore domina x^4 , quindi la funzione integranda si comporta come $x/x^4 = 1/x^3$ e l' integrale diverge; se invece $\alpha < 4/3$, al denominatore domina $x^{3\alpha}$, quindi la funzione integranda si comporta come $x/x^{3\alpha} = 1/x^{3\alpha-1}$ e l' integrale converge se e solo se

$$3\alpha - 1 < 1 \iff \alpha < 2/3 .$$

Allora $A =]-\infty, 2/3[$, tre delle affermazioni sono vere e la falsa è che $A =]-\infty, 1/2]$.

Esercizio 7. Il limite $\displaystyle\lim_{x\to\pi/3} \frac{2\cos x - 1}{3x - \pi}$

(A) è uguale a $-1/\sqrt{3}$.

(B) è uguale a $-\sqrt{3}/2$.

(C) è uguale a $-1/2$.

(D) non esiste.

Poniamo $y = x - \pi/3$, così $x = y + \pi/3$ e

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pi/3} \frac{2\cos x - 1}{3x - \pi} &= \lim_{y\to 0} \frac{2\cos\left(y + \frac{\pi}{3}\right) - 1}{3y} = \lim_{y\to 0} \frac{2\cos y \cos\frac{\pi}{3} - 2\operatorname{sen} y \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} - 1}{3y} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{\cos y - 1 - \sqrt{3}\,\operatorname{sen} y}{3y} = \lim_{y\to 0} \left(\frac{1}{3}\frac{\cos y - 1}{y} - \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\operatorname{sen} y}{y} \right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} . \end{aligned}$$

Nulla vieta, comunque, di applicare il Teorema di de l'Hôpital.
