Risoluzione del compito n. 3 (Febbraio 2014/2)

PROBLEMA 1

Determinate le soluzioni (z, w), con $z, w \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} w^2 = \dfrac{1 + |w|^2}{2} \\ z^2 = |z|^2 + w \, . \end{cases}$$

Nella prima uguaglianza, il secondo membro è un numero reale positivo, quindi prendendo i moduli di ambo i membri (il che lascia invariato il secondo) e ricordando che $|w^2| = |w|^2$

$$|w|^2 = \frac{1 + |w|^2}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad |w|^2 = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad |w| = 1 \, .$$

Allora la prima equazione si riscrive

$$w^2 = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad w = 1 \quad \text{oppure} \quad w = -1 \, .$$

La seconda equazione darebbe nel primo caso (quello $w = 1$)

$$z^2 = |z|^2 + 1$$

che non ha soluzioni: infatti prendendo come prima i moduli avremmo un'uguaglianza impossibile. Resta solo il caso $w = -1$ che trasforma la seconda equazione in

$$z^2 = |z|^2 - 1 \iff -1 = z^2 - |z|^2 = z^2 - z\bar{z} = z(z - \bar{z}) = z \cdot 2\mathrm{i}\Im z \, .$$

Dato che il primo membro è reale, il numero z deve essere immaginario puro, $z = \mathrm{i}b$, quindi l'equazione dà

$$-1 = \mathrm{i}b \cdot 2\mathrm{i}b = -2b^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad b = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \, .$$

Allora le due soluzioni del sistema sono

$$z = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \, , \quad w = -1 \qquad \text{e} \qquad z = -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \, , \quad w = -1 \, .$$

PROBLEMA 2

Sia $\boldsymbol{f_\alpha(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\frac{11}{6}x^2} - x^\alpha \cos(2x)}$ **. Calcolate al variare di** $\boldsymbol{\alpha \in \mathbb{R}}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_\alpha(x)}{x^4} \, .$$

Iniziamo osservando che per x vicino a zero il primo addendo si comporta come x e il secondo come x^α, dunque per $\alpha \neq 1$ tutto è chiaro: infatti per $\alpha > 1$ l'andamento di f_α dovrebbe essere come quello di x, e per $\alpha < 1$ dovrebbe essere come $-x^\alpha$. Verifichiamolo: nel caso $\alpha > 1$ abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_\alpha(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \Big(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \frac{1}{1+\frac{11}{6}x^2} - x^{\alpha-1}\cos(2x) \Big) = 1 \, ,$$

dato che $x^{\alpha-1} \to 0$, quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_\alpha(x)}{x^4} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f_\alpha(x)/x}{x^3} = +\infty \, .$$

In modo analogo se $\alpha < 1$

$$\frac{f_\alpha(x)}{x^\alpha} = x^{1-\alpha} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \frac{1}{1+\frac{11}{6}x^2} - \cos(2x) \to -1$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_\alpha(x)}{x^4} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f_\alpha(x)/x^\alpha}{x^{4-\alpha}} = -\infty \, .$$

Resta il caso $\alpha = 1$, e visto che il denominatore nel limite è x^4 sviluppiamo fino all'ordine 4 la funzione

$$f_1(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\frac{11}{6}x^2} - x\cos(2x) \, .$$

Ricordando che $1/(1+t) = 1 - t + t^2 + o(t^2)$ abbiamo intanto

$$\frac{1}{1+\frac{11}{6}x^2} = 1 - \frac{11}{6}x^2 + \frac{11^2}{6^2}x^4 + o\Big(\frac{11^2}{6^2}x^4\Big) = 1 - \frac{11}{6}x^2 + o(x^3)$$

(il termine di quarto ordine non ci servirà, dato che questo sviluppo va moltiplicato per quello di $\operatorname{sen} x$ che comincia con un termine di ordine 1), quindi

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \Big(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\Big)\Big(1 - \frac{11}{6}x^2 + o(x^3)\Big) - x\Big(1 - \frac{4x^2}{2} + o(x^3)\Big) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - \frac{11}{6}x^3 - x + 2x^3 = o(x^4) \, . \end{aligned}$$

La cosa, benché inusuale, non deve spaventare: la funzione f_1 è un infinitesimo di ordine superiore al quarto. Per sapere di che ordine si tratta, avremmo dovuto allora usare sviluppi più lunghi, ma nel nostro caso non serve dato che dobbiamo calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_1(x)}{x^4} = \lim_{x\to 0^+} \frac{o(x^4)}{x^4} = 0$$

per definizione di o piccolo. In conclusione

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_\alpha(x)}{x^4} = \begin{cases} -\infty & \text{se } \alpha < 1 \\ 0 & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Osserviamo che un modo ancora più rapido, in questo caso, sarebbe stato scrivere

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_\alpha(x)}{x^4} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - x^\alpha \cos(2x)\bigl(1+\frac{11}{6}x^2\bigr)}{\bigl(1+\frac{11}{6}x^2\bigr)x^4} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - x^\alpha \cos(2x)\bigl(1+\frac{11}{6}x^2\bigr)}{x^4}$$

dato che $1+(11/6)x^2 \to 1$. Ora i conti sono più semplici e al numeratore abbiamo

$$\Bigl(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\Bigr)-x^\alpha\Bigl(1-2x^2+o(x^3)\Bigr)\Bigl(1+\frac{11}{6}x^3\Bigr) = x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)-x^\alpha+\frac{x^{2+\alpha}}{6}+o(x^{3+\alpha})$$

che dà $x+o(x)$ se $\alpha<1$, dà $-x^\alpha+o(x^\alpha)$ se $\alpha>1$ e si riduce a $o(x^4)$ se $\alpha=1$.

PROBLEMA 3

Sia data la funzione

$$\boldsymbol{f(x) = |x|(2-x)\mathrm{e}^{-x}} \ .$$

a) **Determinatene il dominio, i limiti agli estremi del dominio, il segno, gli zeri, gli intervalli di monotonia, quindi tracciate un grafico approssimativo di $\boldsymbol{f}$.**

b) **Determinate al variare di $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $\boldsymbol{f(x) = k}$.**

c) **Determinate l'area della parte di piano che sta sotto l'asse delle ascisse e sopra il grafico di $\boldsymbol{f}$.**

La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$. Poniamo

$$g(x) = x(2-x)\mathrm{e}^{-x} = (2x - x^2)\mathrm{e}^{-x}$$

e osserviamo che

$$x \geq 0 \Rightarrow f(x) = g(x) \ , \qquad x < 0 \Rightarrow f(x) = -g(x) \ :$$

allora studiamo la più facile g , dopo di che per $x < 0$ sostituiremo g con $-g$. Abbiamo immediatamente

$$g(x) = 0 \iff x = 0 \ , \quad x = 2 \ ; \qquad g(x) > 0 \iff 0 < x < 2 \ ,$$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty \ , \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0^- \ .$$

Poi

$$g'(x) = (2-2x)\mathrm{e}^{-x} - (2x - x^2)\mathrm{e}^{-x} = (x^2 - 4x + 2)\mathrm{e}^{-x} \ ,$$

perciò

$$g'(x) < 0 \qquad \iff \qquad x^2 - 4x + 2 < 0 \qquad \iff \qquad 2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2} \ .$$

Il punto $x_M = 2 - \sqrt{2}$ è di massimo locale per g , mentre $x_m = 2 + \sqrt{2}$ è di minimo locale. Possiamo dire che x_m non può essere di minimo assoluto, dato che g non ha minimo visto che tende a $-\infty$ per $x \to -\infty$. Quanto all'altro punto, invece, è di massimo assoluto, ma non è ovvio: infatti g cresce prima di x_M e decresce da x_M a x_m , quindi certamente $g(x_M) \geq g(x)$ per $x \leq x_m$. Poi, in particolare, $g(x_M) > 0$ dato che x_M è un punto fra 0 e 2 , dove g è positiva. Ma per $x > x_m$ la funzione g cresce e tende a 0 , dunque è negativa, e allora $g(x_M) > g(x)$ anche per $x > x_m$. Allora, come si è detto, x_M è di massimo assoluto per g . Poniamo

$$M = g(x_M) = (2\sqrt{2} - 2)\mathrm{e}^{\sqrt{2}-2} \ , \qquad m = g(x_m) = (-2\sqrt{2} - 2)\mathrm{e}^{-2-\sqrt{2}} \ .$$

Calcoliamo poi per completezza (servirà poi)

$$g'(0) = 2 \ .$$

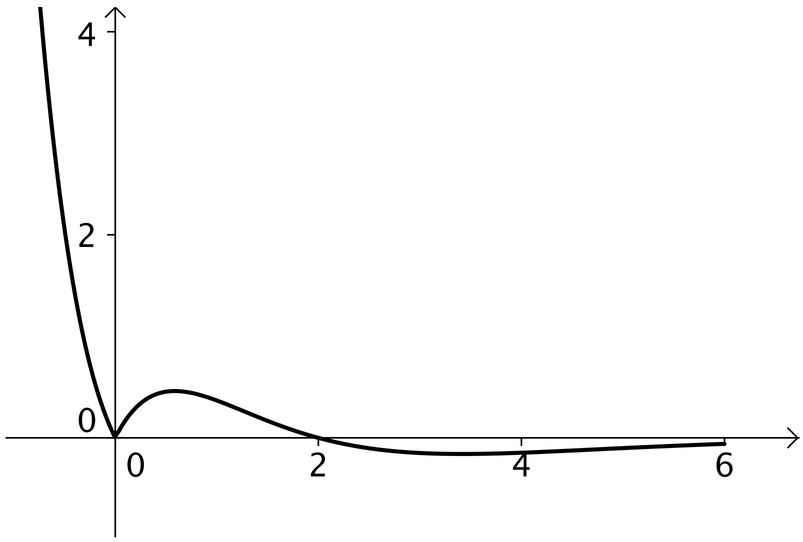
Da qui a tracciare il grafico di g e poi quello di f il passo è breve; per f abbiamo

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \;, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^- \;,$$

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \text{se } x < 0 \text{ o se } 0 < x < 2 \\ f(x) = 0 & \text{se } x = 0 \text{ o } x = 2 \\ f(x) < 0 & \text{se } x > 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} f'(x) > 0 & \text{se } 0 < x < x_M \text{ o } x > x_m \\ f'(x) = 0 & \text{se } x = x_M \text{ o } x = x_m \\ f'(x) < 0 & \text{se } x < 0 \text{ o } x_M < x < x_m, \end{cases}$$

e anche (qui utilizziamo il fatto che $g'(0) = 2$)

$$f'_-(0) = -2 \;, \qquad f'_+(0) = 2 \;.$$



Ora il punto x_M è solo di massimo locale, mentre x_m è di minimo assoluto. Il punto $x = 0$ è di minimo locale viste le derivate destra e sinistra. Per la stretta monotonia di f nei vari intervalli possiamo dire che l'equazione $f(x) = k$ ha:

nessuna soluzione	se $k < m$
una soluzione	se $k = m$
due soluzioni	se $m < k \leq 0$
tre soluzioni	se $0 < k < M$
due soluzioni	se $k = M$
una soluzione	se $k > M$.

La parte di piano di cui dobbiamo calcolare l'area è quella fra il grafico e l'asse delle ascisse, per $x \geq 2$. Dato che è tutta nella zona $x \geq 0$, la funzione f è semplicemente $x(2-x)\mathrm{e}^{-x}$; inoltre f è negativa, e l'area da calcolare risulta allora

$$\int_2^{+\infty} -f(x)\,dx = \int_2^{+\infty} (x^2 - 2x)\mathrm{e}^{-x}\,dx \;.$$

Ma

$$\int x^2 \mathrm{e}^{-x}\,dx = -x^2\mathrm{e}^{-x} - \int 2x \cdot (-\mathrm{e}^{-x})\,dx = -x^2\mathrm{e}^{-x} + \int 2x\mathrm{e}^{-x}\,dx$$

perciò

$$\int (x^2 - 2x)\mathrm{e}^{-x}\,dx = -x^2\mathrm{e}^{-x} + c \quad \Rightarrow \quad \int_2^{+\infty} (x^2 - 2x)\mathrm{e}^{-x}\,dx = 4\mathrm{e}^{-2}\,.$$

PROBLEMA 4

Determinate lo sviluppo di Taylor di ordine 3, centrato in $x_0 = 0$, della funzione

$$f(x) = \log(\cos x + \operatorname{sen} x)\ .$$

a) **Posto**

$$a_n = \frac{1}{n+1} - f\Big(\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{n+1} - \log\Big(\cos\frac{1}{n} + \operatorname{sen}\frac{1}{n}\Big)\ ,$$

trovate l'unico esponente $\alpha \in \mathbb{R}$ per il quale la successione $\{n^\alpha a_n\}_n$ converge ad un numero reale ℓ diverso da zero e calcolate tale limite ℓ.

b) **Discutete al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ il carattere della serie $\sum_n n^\beta a_n$.**

Dato che

$$\cos x + \operatorname{sen} x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) + x - \frac{x^3}{6}\ , \qquad \log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$$

abbiamo

$$\log(\cos x + \operatorname{sen} x) = \Big(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big) - \frac{1}{2}(\cdots)^2 + \frac{1}{3}(\cdots)^3 + o(\cdots)^3\ ,$$

ma la quantità fra parentesi è di ordine 1, quindi $o(\cdots)^3 = o(x^3)$ e

$$\log(\cos x + \operatorname{sen} x) = \Big(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big) - \frac{1}{2}(x^2 - x^3) + \frac{1}{3}x^3 = x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)\ .$$

Da questo deduciamo

$$a_n = \frac{1}{n+1} - \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{2}{3n^3}\Big) + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\ .$$

Ora potremmo procedere in due modi: il primo è sommare tutto:

$$\begin{aligned}\cdots &= \frac{3n^3 - 3n^2(n+1) + 3n(n+1) - 2(n+1)}{3n^3(n+1)} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\\ &= \frac{(n-2)/(n+1)}{3n^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big) \simeq \frac{1}{3n^3}\ .\end{aligned}$$

Il secondo (naturalmente equivalente) è sviluppare anche il primo termine

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\cdot\Big[1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big] = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)$$

e ottenere di nuovo

$$a_n = \frac{1}{3n^3} + + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\ .$$

Allora

$$\lim_{n\to+\infty}(n^\alpha a_n) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 3\\ 1/3 & \text{se } \alpha = 3\\ 0 & \text{se } \alpha < 3.\end{cases}$$

La convergenza della serie è ora facile: intanto è a termini positivi perché $a_n \simeq 1/3n^3$; poi abbiamo

$$\sum_n n^\beta a_n \simeq \sum_n \frac{1}{n^{3-\beta}}$$

che converge se e solo se $3 - \beta > 1$ ossia $\beta < 2$.

Esercizio 1. In una cittadina, i numeri di telefono sono composti di cinque cifre, tutte diverse fra loro e tutte fra 1 e 6. Inoltre nessun numero di telefono può iniziare per 2 o per 4. Quanti sono i numeri di telefono possibili?

(A) 480.	(C) 720.
(B) 240.	(D) 96.

Senza troppe finezze, contiamo i numeri di telefono: al primo posto possiamo trovare una cifra tra 1,3,5,6, quindi abbiamo quattro possibilità. Al secondo posto va una qualunque cifra tranne quella già impiegata, quindi 5 possibilità. Al terzo posto ci restano quattro possibilità, tre al quarto e all'ultimo solo due, per un totale di

$$4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 480$$

numeri possibili.

Esercizio 2. Il limite per $x \to +\infty$ di $\dfrac{2x + 3\int_0^x \operatorname{sen} t\,dt}{x}$

(A) vale 2.	(C) vale $+\infty$.
(B) vale 5.	(D) non esiste.

Abbiamo

$$\frac{2x + 3\int_0^x \operatorname{sen} t\,dt}{x} = \frac{2x - 3\cos x + 3\cos(0)}{x} = 2 - 3\frac{\cos x - 1}{x} \to 2\ ,$$

visto che il coseno è una funzione limitata e il denominatore x tende all'infinito. Osserviamo che questo è un caso di limite di f/g in cui f e g tendono all'infinito, e il limite di f/g esiste anche se (controllate) quello di f'/g' non esiste: non c'è contraddizione con il teorema di de l'Hôpital, rileggetene l'enunciato.

Esercizio 3. Sia $f(x) = 4x^3 + x^4 - 4$. Allora

(A) f è convessa su $[0, +\infty[$.	(C) f ha massimo su $\mathbb{R}$.
(B) f è decrescente su $]-\infty, -1[$.	(D) $f(x) > -30$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Occorre fare un breve studio di f: il termine dominante all'infinito è x^4, quindi $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ e in particolare f non ha massimo. Poi, abbiamo

$$f'(x) = 12x^2 + 4x^3 = 4x^2(x+3)\ , \qquad f''(x) = 24x + 12x^2 = 12x(x+2)\ ;$$

allora f è decrescente (strettamente) su $]-\infty, -3]$ e crescente (strettamente, dato che la derivata è sempre positiva salvo nei due punti -3 e 0) in $[-3, +\infty[$. Il punto -3 è di minimo assoluto e $f(-3) = -31$. Già ora tre risposte sono da scartare. Osserviamo che $f'' \geq 0$ su $[-2, +\infty[$ quindi f è convessa (di nuovo, strettamente) su $[-2, +\infty[$ e in particolare anche su $[0, +\infty[$.

Esercizio 4. I numeri complessi $z_1 = 1 - 3\mathrm{i}$ e $z_2 = 1 + \mathrm{i}$ sono soluzioni dell'equazione

(A) $z^2 - 2(1 - \mathrm{i})z + 4 - 2\mathrm{i} = 0$.

(B) $z^2 - 2(1 + \mathrm{i})z + 4 + 2\mathrm{i} = 0$.

(C) $z^2 - 2z + 10 = 0$.

(D) $z^2 - 2z + 2 = 0$.

Se z_1 e z_2 sono soluzioni distinte di un'equazione di secondo grado, cioè sono le due radici di un polinomio di secondo grado, questo è divisibile per $z - z_1$ e per $z - z_2$, quindi il polinomio è un multiplo di $(z - z_1)(z - z_2)$, ovvero si scrive per qualche valore di $a \in \mathbb{C}$

$$a(z - z_1)(z - z_2) = a(z^2 - sz + p) ,$$

dove abbiamo posto

$$s = z_1 + z_2 , \qquad p = z_1 z_2 .$$

Il numero a è quindi il coefficiente di z^2. Dato che i quattro polinomi proposti hanno coefficiente del termine quadratico uguale a 1, quello che ha come radici i due numeri indicati nell'esercizio deve avere coefficiente di z uguale a

$$s = z_1 + z_2 = 1 - 3\mathrm{i} + 1 + \mathrm{i} = 2 - 2\mathrm{i}$$

il che individua già tre risposte errate. Per controllare che la rimanente è davvero corretta, osserviamo che il termine senza z deve essere

$$p = z_1 z_2 = (1 - 3\mathrm{i})(1 + \mathrm{i}) = 1 + 3 - 3\mathrm{i} + \mathrm{i} = 4 - 2\mathrm{i} .$$

Osserviamo che sin dall' inizio avremmo potuto notare che due risposte sono certamente errate, precisamente quelle in cui tutti i coefficienti dell'equazione sono reali: infatti una equazione di secondo grado a coefficienti reali ha, come è ben noto, o soluzioni reali (ma non è il nostro caso) o soluzioni complesse *coniugate*, e le due fornite non sono una il coniugato dell'altra.

Esercizio 5. L' integrale $\displaystyle\int_0^{3\pi/2} |x - \pi| \operatorname{sen} x \, dx$ vale

(A) $\pi - 1$.

(B) $1 + \pi$.

(C) π.

(D) la funzione non ha primitive.

Dato che $x - \pi$ è positivo per $x > \pi$, abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_0^{3\pi/2} |x - \pi| \operatorname{sen} x \, dx &= \int_0^{\pi} |x - \pi| \operatorname{sen} x \, dx + \int_{\pi}^{3\pi/2} |x - \pi| \operatorname{sen} x \, dx \\
&= \int_0^{\pi} (\pi - x) \operatorname{sen} x \, dx + \int_{\pi}^{3\pi/2} (x - \pi) \operatorname{sen} x \, dx \\
&= \int_0^{\pi} (\pi - x) \operatorname{sen} x \, dx - \int_{\pi}^{3\pi/2} (\pi - x) \operatorname{sen} x \, dx .
\end{aligned}$$

Dobbiamo dunque calcolare solo una primitiva di $(\pi - x)\,\mathrm{sen}\,x$. Abbiamo, per parti,

$$\int (\pi - x)\,\mathrm{sen}\,x\,dx = (\pi - x)(-\cos x) - \int (-1)(-\cos x)\,dx = (x - \pi)\cos x - \mathrm{sen}\,x\ ,$$

quindi

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} (\pi - x)\,\mathrm{sen}\,x\,dx &= (0) - (-\pi) = \pi \\ \int_{\pi}^{3\pi/2} (\pi - x)\,\mathrm{sen}\,x\,dx &= 1 - (0) = 1 \\ \int_0^{3\pi/2} |x - \pi|\,\mathrm{sen}\,x\,dx &= \pi - 1\ . \end{aligned}$$

Osserviamo che il grafico della funzione $f(x) = |x - \pi|\,\mathrm{sen}\,x$ è simmetrico rispetto al punto $(\pi, 0)$ — se anziché di π si fosse trattato di 0 avremmo detto che è dispari — quindi $\int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\,dx = -\int_{\pi}^{3\pi/2} f(x)\,dx$ e in particolare

$$\int_0^{3\pi/2} |x - \pi|\,\mathrm{sen}\,x\,dx = \int_0^{\pi/2} |x - \pi|\,\mathrm{sen}\,x\,dx = \int_0^{\pi/2} (\pi - x)\,\mathrm{sen}\,x\,dx$$

quindi avremmo potuto calcolare solo quest'ultimo.

Esercizio 6. Per la funzione $f(x) = \mathrm{sen}\big(\mathrm{e}^{2x} - 1\big)$, la formula di Taylor di ordine tre con centro in $x_0 = 0$ è

(A) $f(x) = 2x + 2x^2 + o(x^3)$.	(C) $f(x) = 2x + 2x^2 + 8x^3/3 + o(x^3)$.
(B) $f(x) = 2x + 2x^2 + o(x^2)$.	(D) $f(x) = 2x + 2x^2 + 4x^3/3 + o(x^3)$.

Abbiamo

$$\mathrm{e}^{2x} = 1 + 2x + \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{6} + o(x^3) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

quindi

$$\mathrm{sen}\big(\mathrm{e}^{2x} - 1\big) = \Big(2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\Big) - \frac{1}{6}(\cdots)^3 + o(\cdots^4)\ .$$

La quantità fra parentesi è un infinitesimo di ordine uno, dunque $o(\cdots)^4 = o(x^4)$ e dei termini in $(\cdots)^3$ resta solo quello con la terza potenza, perciò

$$\mathrm{sen}\big(\mathrm{e}^{2x} - 1\big) = 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3) - \frac{1}{6}(8x^3) = 2x + 2x^2 + o(x^3)\ .$$

Osserviamo che i **polinomi** di Taylor di ordine 2 e 3 coincidono, ma la **formula** di ordine 3 deve contenere esattamente $o(x^3)$.

Esercizio 7. Data una funzione continua $f\colon]0,1] \to [0, +\infty[$ tale che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, quale fra le seguenti risposte è vera?

(A) Nessuna delle altre è vera.

(B) f monotona $\Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx < +\infty$.

(C) $\int_0^1 f(x)\,dx = +\infty$.

(D) $f(x) > 0\ \forall x \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx = +\infty$.

Nessuna delle tre risposte proposte è vera: infatti le potenze $1/x^\alpha$ sono monotone e positive, ma la convergenza o no dell' integrale dipende dall'esponente.