Correzione del compito di Analisi Matematica 1 del 14 luglio 2014

Prima parte

(1) Il coefficiente di a^8 nello sviluppo di $(a-1/3)^{11}$ è

(A) $-55/9$.
(B) $-1/27$.
(C) $-44/9$.
(D) $-115/9$.

Il Teorema del Binomio di Newton ci permette di scrivere

$$\left(a-\frac{1}{3}\right)^{11}=\sum_{k=0}^{11}\binom{11}{k}\cdot a^k\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-k}=$$

$$=\text{-----}+\binom{11}{8}\cdot a^8\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^3+\ldots$$

quindi il numero cercato è

$$\frac{11!}{8!\cdot 3!}\cdot\left(-\frac{1}{27}\right)=-\frac{\cancel{9}^{5}\cdot\cancel{10}\cdot 11}{\cancel{2}_1\cdot 3^{\cancel{4}\,2}}=-\frac{55}{9}$$

ovvero la risposta (A) è corretta.

(2) Sia $I=\int_{-2}^{1}\frac{1}{(x-2)(x+3)}\,dx$. Quale tra le seguenti affermazioni è vera?

(A) $I=-4\log 2$.
(B) Nessuna delle altre risposte è vera.
(C) $I=-\frac{4}{5}\log 2$.
(D) $I=-\frac{1}{5}\log 2$.

$$f(x)=\frac{1}{(x-2)(x+3)}=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+3}\right)$$, da cui segue

che $f:[-2,1]\to\mathbb{R}$ è continua e perciò Riemann integrabile e si ha

$$\int_{-2}^{1}f(x)dx=\frac{1}{5}\left[\int_{-2}^{1}\frac{dx}{x-2}-\int_{-2}^{1}\frac{dx}{x+3}\right]=\frac{1}{5}\left\{\Big[\log|x-2|\Big]_{-2}^{1}-\Big[\log|x+3|\Big]_{-2}^{1}\right\}$$

$$=\frac{1}{5}\left\{-\log 4-\log 2\right\}=-\frac{4}{5}\log 2$$ ovvero la risposta corretta è la (C)

(3) Siano $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $0 < x < y < 1$. Allora,

(A) $\sqrt{x}y > y$.

(B) nessuna delle altre risposte è vera.

(C) $x\sqrt{y} < x$.

(D) $\sqrt{x}\sqrt{y} < x$.

La (A) è falsa: $\begin{cases} 0<x<y<1 \\ \sqrt{x}\,y>y \end{cases} \iff \begin{cases} 0<x<y<1 \\ \sqrt{x}>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<x<y<1 \\ x>1 \end{cases}$

Assurdo

La (D) è falsa: $\begin{cases} 0<x<y<1 \\ \sqrt{x}\sqrt{y}<x \end{cases} \iff \begin{cases} 0<x<y<1 \\ \sqrt{y}<\sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<x<y<1 \\ y<x \end{cases}$

Assurdo

La (C) è vera: $\begin{cases} 0<x<y<1 \\ x\sqrt{y}<x \end{cases} \iff \begin{cases} 0<x<y<1 \\ \sqrt{y}<1 \end{cases}$ che è vera

Ovviamente, essendo (C) vera, si ha che (B) è falsa

(4) Sia $f(x) = x^{\log x}$, $x > 0$. L'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 1/e$

(A) è $y + 2e^2x = 3e$.

(B) è $e^2y - 2x = 2/e$.

(C) è $ey + 2e = e^2 + 2x/e$.

(D) non è nessuna tra quelle fornite nelle altre risposte.

$$f(1/e) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\log(1/e)} = \left(\frac{1}{e}\right)^{-1} = e$$

$$f'(x) = \left(e^{\log^2 x}\right)' = e^{\log^2 x} \cdot \left(2\log x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

$$f'(1/e) = e \cdot \left(2\log\frac{1}{e} \cdot \frac{1}{1/e}\right) = -2e^2$$

L'equazione cercata è

$$y - f(1/e) = f'(1/e)\,(x - 1/e)$$

$$y - e = -2e^2(x - 1/e) \Rightarrow y - e = -2e^2x + 2e$$

$$\Rightarrow y + 2e^2x = 3e$$

ovvero la risposta corretta è la (A)

(5) Sia $x \in \mathbb{R}$. La serie $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{x^{2n}}{n!}+\frac{1}{n^{x+1}}\right)$ converge se e solo se

(A) $x \in (0\,,1)$.

(B) $x \in (1\,,+\infty)$

(C) $x \in (-1\,,1)$.

(D) $x \in (0\,,+\infty)$.

$a_n = b_n + c_n = \frac{x^{2n}}{n!} + \frac{1}{n^{x+1}}$ con b_n e c_n

a termini positivi dunque $\sum_n a_n$ converge se convergono $\sum_n b_n$ e $\sum_n c_n$ contemporaneamente

- Per il criterio del rapporto $\sum_n \frac{x^{2n}}{n!}$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$;
- $\sum_n \frac{1}{n^{1+x}}$ converge se $1+x>1$

ovvero se $x \in (0,+\infty)$

Ne segue che la serie $\sum_n a_n$ converge

se $x \in (0,+\infty) \cap \mathbb{R} = (0,+\infty)$

La risposta corretta è la (D)

(6) Sia $z = 1 + \mathrm{i}$. Allora, $w = \frac{z+\mathrm{i}\bar{z}}{z|z|^2-\mathrm{i}}$ è uguale a

(A) $w = 2(3-\mathrm{i})/5$.

(B) $w = 2(1+2\mathrm{i})/5$.

(C) $w = 2(2-\mathrm{i})/5$.

(D) $w = 2(3+\mathrm{i})/5$.

$$\omega = \frac{1+i+i(1-i)}{(1+i)\cdot(1^2+1^2)-i} = \frac{2+2i}{2+2i-i}\cdot\frac{2-i}{2-i} = \frac{4+2-2i+4i}{5}$$

$$= \frac{6+2i}{5} = 2\,\frac{3+i}{5}$$

La risposta corretta è la (D)

(7) Sia $a \in \mathbb{R}$. Il limite $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{a^3+x}+a^2-2}{x}$ esiste finito se e solo se

(A) $a=-2$ o $a=3$.

(B) $a=-2$ o $a=1$.

(C) $a=-1$ o $a=2$.

(D) $a=-3$ o $a=2$.

Se $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{a^3+x}+a^2-2}{x}$ =0

allora $\sqrt[3]{a^3}+a^2-2 = a^2+a-2=0$

allora $a_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+8} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$

$a_1=-2 \quad a_2 = 1$

e dunque le risposte (A), (C) e (D) sono certamente false.

Viceversa

Se $a=-2$ $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x-8}+4-2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x-8}+2}{x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2-2\sqrt[3]{1-\frac{x}{8}}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2-2\left(1-\frac{x}{24}+o(x)\right)}{x} = \frac{1}{24} \in \mathbb{R}$

Se $a=1$ $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\frac{x}{3}+o(x)-1}{x} = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$

1) Determinate le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^4 - i\sqrt{3}z^2 - \left(1 + i\sqrt{3}\right) = 0.$$

$$\begin{cases} \omega = z^2 \\ \omega^2 - i\sqrt{3}\,\omega - (1+i\sqrt{3}) = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Per risolvere l'equazione (*) si può procedere come segue

$$\omega_{1,2} = +i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3+4+i4\sqrt{3}}$$

Per calcolare le 2 radici di $t = 1+i4\sqrt{3}$ si osserva che $t = 7\cdot\left(\frac{1}{7}+i\frac{4\sqrt{3}}{7}\right) = 7\left(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha\right)$

da cui segue che

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{4}{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

Il Teorema della radice n-esima, nel caso $n=2$, ci dà

$$\left(\sqrt{t}\right)_1 = \sqrt{7}\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{7}\left(\frac{2}{\sqrt{7}} + i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right) = 2+i\sqrt{3}$$

$$\left(\sqrt{7}\right)_2 = \sqrt{7}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\pi\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}+\pi\right)\right) = \sqrt{7}\left(-\frac{2}{\sqrt{7}} - i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right) = -2-i\sqrt{3}$$

$\Downarrow$

$$\omega_1 = +i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(\sqrt{t}\right)_1 = +i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3}$$

$$\omega_2 = +i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(\sqrt{t}\right)_2 = +i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -1$$

Ora $z_{3,4} = \sqrt{\omega_2} = \pm i$ mentre

$$\omega_1 = 2\left(+\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$$

da cui segue

$$z_3 = \left(\sqrt{\omega_1}\right)_1 = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$z_4 = \left(\sqrt{\omega_1}\right)_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i \,\mathrm{sen}\,\frac{7}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Concludendo $\left\{+i; -i; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

è l'insieme delle soluzioni dell'equazione di partenza

N.B. Un modo alternativo per risolvere

$$\omega^2 - i\sqrt{3}\,\omega - (1 + i\sqrt{3}) = 0 \qquad (*)$$

è quello di sostituire ω con $x + iy = \mathrm{Re}\,\omega + i\,\mathrm{Im}\,\omega$

$$(x+iy)^2 - i\sqrt{3}(x+iy) - 1 - i\sqrt{3} = 0$$

$$x^2 - y^2 + 2ixy - i\sqrt{3}x + \sqrt{3}y - 1 - i\sqrt{3} = 0$$

$$x^2 - y^2 + \sqrt{3}y - 1 + i(2xy - \sqrt{3}x - \sqrt{3}) = 0 \qquad (**)$$

e quindi, per il principio di identità dei polinomi, devono essere nulle parte reale ed immaginaria di $(**)$, e quindi va risolto il sistema reale

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + \sqrt{3}y - 1 = 0 \\ 2xy - \sqrt{3}x - \sqrt{3} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} " \\ y = \dfrac{\sqrt{3}x + \sqrt{3}}{2x} \end{cases} \qquad x \neq 0$$

$$x^2 - \frac{3x^2 + 3 + 6x}{4x^2} + \frac{3x + 3}{2x} - 1 = 0$$

$$4x^4 - 3x^2 - 3 - \cancel{6x} + 6x^2 + \cancel{6x} - 4x^2 = 0$$

$$4x^4 - x^2 - 3 = 0 \qquad (x^2)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{8} = \begin{cases} 1 \\ \cancel{-\frac{6}{8}} \end{cases}$$

$-6/8$ va scartata in quanto $x^2 = -6/8$ non ha soluzioni in $\mathbb{R}$

Troviamo quindi, da $x^2 = 1$

$x_1 = 1 \rightsquigarrow y_1 = \frac{\sqrt{3}\cdot 1 + \sqrt{3}}{2\cdot 1} = \sqrt{3} \Rightarrow \omega_1 = 1 + i\sqrt{3}$

$x_2 = -1 \rightsquigarrow y_2 = \frac{\sqrt{3}\cdot(-1)+\sqrt{3}}{-2} = 0 \Rightarrow \omega_2 = -1$

e poi si conclude come prima estraendo le radici quadrate di ω_1 e di ω_2.

2) Determinate per quali $\alpha > 0$ converge la serie

$$\sum_{n\geq 1} \log\left(\frac{2}{\pi}\arctan(n^\alpha)\right).$$

Studiamo $a_n = \log\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(n^\alpha)\right) \qquad \alpha > 0,\ n \geq 1$

Si ha $\quad 0 < \operatorname{arctg}(n^\alpha) < \frac{\pi}{2} \qquad \forall \alpha > 0 \quad n \geq 1$

$$0 < \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(n^\alpha) < 1 \qquad " \qquad "$$

$$a_n = \log\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(n^\alpha)\right) < 0 \qquad " \qquad "$$

ovvero la serie è a termini negativi.
Conviene quindi studiare la convergenza assoluta, cioè studiare $\sum_{n\geq 1} |a_n|$, in quanto equivale alla convergenza semplice.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \log\left(\lim_n \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(n^\alpha)\right) = \log\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(+\infty)\right) = 0$$

Ricordando $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x} \quad \forall x > 0$ si ha

$\operatorname{arctg} x = x + o(x) \quad$ e $\quad \log(1-x) = -x + o(x) \quad x \to 0$

da cui

$$a_n = \log\left(\frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{n^\alpha}\right)\right) = \log\left(1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

$$= \log\left(1 - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$$

$$= -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \qquad n \to +\infty \quad \forall \alpha > 0$$

Si ha $\circ)\ |a_n| \sim \frac{1}{n^\alpha}$ per $n \to +\infty$ $\forall \alpha > 0$

$\circ)\ \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\forall \alpha > 1$

e dunque, per il criterio del confronto asintotico,

$\sum_n |a_n|$ converge $\forall \alpha > 1$ e diverge per $\alpha \in (0,1]$

come pure

$\sum_n a_n$ " " " " " "

3) Sia

$$F(x) = \begin{cases} \int_{x^2}^{x} \frac{1-\cos(2\sqrt{t})}{t}\, dt, & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(a) Determinate il polinomio di Taylor di ordine tre di F centrato in $x_0 = 0$.
(b) Calcolate, al variare di $a, b \in \mathbb{R}$, il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{F(x) - (ax + bx^2)}{x^3}.$$

$$\cos(2x) = 1 - \frac{\cancel{4}^{2} x^2}{\cancel{2}_1} + \frac{\cancel{16}^{2} x^4}{\cancel{24}_3} - \frac{\cancel{64}^{4}}{\cancel{720}_{45}} x^6 + o(x^6) \quad x \to 0$$

$$\frac{1}{t}\left(1 - \cos(2\sqrt{t})\right) = \frac{1}{t}\left(2t - \frac{2}{3}t^2 + \frac{4}{45}t^3 + o(t^3)\right) \quad t \to 0^+$$

$$= 2 - \frac{2}{3}t + \frac{4}{45}t^2 + o(t^2) = P(t) + o(t^2) \quad t \to 0^+$$

Adesso osserviamo che se $f(x) = g(x) + o(x^2)$ per $x \to 0^+$ con f e g derivabili allora $\int_0^y f(x)dx = \int_0^y g(x)dx + o(y^3)$ $y \to 0^+$ infatti

$$\lim_{y \to 0^+} \frac{\int_0^y f(x)dx - \int_0^y g(x)dx}{y^3} \overset{(H)}{=} \lim_{y \to 0^+} \frac{f(y) - g(y)}{3y^2} = \lim_{y \to 0^+} \frac{o(y^2)}{3y^2} = 0!$$

Dunque $F(x) = \int_0^x [P(t) + o(t^2)]\, dt - \int_0^{x^2} [P(t) + o(t^2)]\, dt$

$$= \left[2t - \frac{t^2}{3} + \frac{4}{135}t^3 + o(t^3)\right]_0^x - \left[2t - \frac{t^2}{3} + \frac{4}{135}t^3 + o(t^3)\right]_0^{x^2}$$

$$= 2x - \frac{x^2}{3} + \frac{4}{135}x^3 - 2x^2 + o(x^3)$$

$$= 2x - \frac{7}{3}x^2 + \frac{4}{135}x^3 + o(x^3) \quad x \to 0^+$$

b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)-ax-bx^2}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(2-a)x-\left(\frac{7}{3}+b\right)x^2+\frac{4}{135}x^3+o(x^3)}{x^3}$

$$= \begin{cases} +\infty & a<2 \\ -\infty & a>2 \\ +\infty & a=2 \quad b<-\frac{7}{3} \\ -\infty & a=2 \quad b>-\frac{7}{3} \\ \frac{4}{135} & a=2 \quad b=-\frac{7}{3} \end{cases}$$

$b=-10$

$b=100$

4) Calcolate, qualora esista,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4-x^2+1}\,dx.$$

La funzione integranda $f(x)=\frac{x}{x^4-x^2+1}$ è continua e limitata su $[0,+\infty[$, dunque $\int_0^1 f(x)dx \in \mathbb{R}$. Inoltre $f(x) \sim \frac{1}{x^3}$ per $x\to+\infty$, ed essendo $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3} \in \mathbb{R}$, per il criterio del confronto asintotico concludo che $\int_1^{+\infty} f\,dx \in \mathbb{R}$, dunque $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ esiste

$$x^4-x^2+1 = x^4-x^2+\frac{1}{4}+\frac{3}{4} = \left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

$$= \frac{3}{4}\left[\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{4}{3}+1\right]$$

dunque si ha $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{4}{3}\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}$

e operando la sostituzione $u=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)$

$du = \frac{4}{\sqrt{3}}\cdot x\,dx$

si trova che $x=0 \longmapsto u=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ da cui

$x=+\infty \longmapsto u=+\infty$

$$= \frac{4}{3}\int_{-1/\sqrt{3}} \frac{1}{u^2+1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} du = \frac{1}{\sqrt{3}} \lim_{\beta \to +\infty} \int_{-1/\sqrt{3}}^{\beta} \frac{du}{u^2+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \lim_{\beta \to +\infty} \Big[\operatorname{arctg} u \Big]_{u=-1/\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{4\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$