Risoluzione del compito n. 4 (Giugno 2014)

PROBLEMA 1

Determinate le soluzioni (z,w), con $z,w\in\mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} 3z = w - 2\bar{w} - \mathrm{i} \\ 2\mathrm{i}z + 4\mathrm{i}\bar{z} = -3w^2 \,. \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo

$$z = \frac{w - 2\bar{w} - \mathrm{i}}{3} \,,$$

che sostituito nella seconda la fa diventare

$$-3w^2 = 2\mathrm{i}\frac{w-2\bar{w}-\mathrm{i}}{3} + 4\mathrm{i}\frac{\bar{w}-2w+\mathrm{i}}{3} = \frac{-6\mathrm{i}w-2}{3} \,,$$

cioè

$$9w^2 - 6\mathrm{i}w - 2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad w = \frac{3\mathrm{i}\pm\sqrt{-9+18}}{9} = \frac{\mathrm{i}\pm 1}{3}$$

e abbiamo trovato i due valori possibili di w. Sostituendoli nell'espressione di z trovata prima abbiamo

$$z = \frac{1}{3}(w - 2\bar{w} - \mathrm{i}) = \frac{1}{3}\frac{\mathrm{i}\pm 1 - 2(-\mathrm{i}\pm 1) - 3\mathrm{i}}{3} = \mp\frac{1}{9}$$

così che possiamo scrivere le due soluzioni del sistema:

$$z = -\frac{1}{9}\,, \quad w = \frac{1+\mathrm{i}}{3} \qquad \text{e} \qquad z = \frac{1}{9}\,, \quad w = \frac{-1+\mathrm{i}}{3} \,.$$

Avremmo potuto risolvere il sistema anche usando la noiosa sostituzione

$$z = a + \mathrm{i}b\,, \quad w = x + \mathrm{i}y \;:$$

infatti otteniamo

$$3a + 3\mathrm{i}b = x + \mathrm{i}y - 2x + 2\mathrm{i}y - \mathrm{i} = -x + \mathrm{i}(3y-1) \iff \begin{cases} 3a = -x \\ 3b = 3y - 1 \end{cases}$$

e

$$\begin{aligned} 2\mathrm{i}(a+\mathrm{i}b) + 4\mathrm{i}(a-\mathrm{i}b) = -3(x^2-y^2+2\mathrm{i}xy) &\iff 6\mathrm{i}a + 2b = -3(x^2-y^2) - 6\mathrm{i}xy \\ &\iff \begin{cases} 2b = -3(x^2-y^2) \\ a = -xy \,. \end{cases} \end{aligned}$$

Sostituendo

$$x = -3a$$

otteniamo il sistema

$$\begin{cases} b = y - \frac{1}{3} \\ 2b = -3(9a^2 - y^2) \\ a = 3ay\ . \end{cases}$$

Dall'ultima equazione ricaviamo che o $a = 0$ oppure $y = 1/3$. Se fosse $a = 0$, utilizzando la prima equazione potremmo riscrivere la seconda come

$$2\Big(y - \frac{1}{3}\Big) = 3y^2 \iff 9y^2 - 6y + 2 = 0\ ,$$

che non ha soluzioni. Resta solo il caso $y = 1/3$, che dà $b = 0$ dalla prima equazione, mentre dalla seconda otteniamo

$$9a^2 = y^2 = \frac{1}{9} \iff a^2 = \frac{1}{9^2} \iff a = \pm\frac{1}{9} \Rightarrow x = -3a = \mp\frac{1}{3}$$

da cui ricostruiamo le due soluzioni, la prima

$$z = a + \mathrm{i}b = \frac{1}{9}\ , \quad w = x + \mathrm{i}y = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\mathrm{i}$$

e la seconda

$$z = a + \mathrm{i}b = -\frac{1}{9}\ , \quad w = x + \mathrm{i}y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\mathrm{i}\ .$$

PROBLEMA 2

Sia $f(x) = 3x\cos x - \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{sen} 3t}{t}\,dt$ **.**

a) **Trovate l'ordine di infinitesimo e la parte principale per** $x \to 0$ **di** $f(x)$ **.**

b) **Calcolate al variare del parametro** $\alpha \in \mathbb{R}$ **il limite** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^\alpha f(x)$ **.**

Ricordiamo innanzitutto che se per una funzione $r(x)$, continua almeno per $x \neq 0$, vale

$$r(x) = o(x^\beta)$$

per $x \to 0$, allora la funzione integrale

$$R(x) = \int_0^x r(t)\,dt$$

verifica

$$R(x) = o(x^{\beta+1}) \ :$$

basta infatti applicare il Teorema di de l'Hôpital in

$$\lim_{x\to 0} \frac{R(x)}{x^{\beta+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{R'(x)}{(\beta+1)x^\beta} = \lim_{x\to 0} \frac{r(x)}{(\beta+1)x^\beta} = 0 \ .$$

A questo punto abbiamo

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$$

perciò

$$\operatorname{sen} 3x = 3x - \frac{9x^3}{2} + \frac{81x^5}{40} + o(x^6) \ , \qquad \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = 3 - \frac{9x^2}{2} + \frac{81x^4}{40} + o(x^5) \ .$$

La funzione resto $o(x^5)$ è la differenza fra il primo membro $(\operatorname{sen} 3x)/x$, che è continua per $x \neq 0$, e un polinomio, perciò per quanto detto prima

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} 3t}{t}\,dt = \int_0^x \Big(3 - \frac{9t^2}{2} + \frac{81t^4}{40} + o(t^5)\Big)\,dt = 3x - \frac{3x^3}{2} + \frac{81x^5}{200} + o(x^6) \ .$$

D'altra parte

$$3x\cos x = 3x\Big(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\Big) = 3x - \frac{3x^3}{2} + \frac{x^5}{8} + o(x^6)$$

e quindi

$$f(x) = \frac{x^5}{8} - \frac{81x^5}{200} + o(x^6) = \frac{25-81}{200}x^5 + o(x^6) = -\frac{7x^5}{25} + o(x^6) \ .$$

Allora f è un infinitesimo di ordine cinque, con parte principale $-7x^5/25$. A questo punto

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > -5 \\ -7/25 & \text{se } \alpha = -5 \\ -\infty & \text{se } \alpha < -5. \end{cases}$$

Volendo, avremmo potuto evitare il risultato che abbiamo usato all' inizio, così: dobbiamo trovare per quale β il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\beta} =: L$$

è finito e diverso da zero. Per il teorema di de l'Hôpital questo problema si riduce (se troveremo un risultato) a porci la stessa domanda per il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{\beta x^{\beta-1}} = \frac{1}{\beta} \lim_{x\to 0} \frac{3\cos x - 3x \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 3x}{x}}{x^{\beta-1}} .$$

ora ci basta sviluppare (fino all'ordine quattro) il numeratore: risulta

$$f'(x) = -\frac{7}{5}x^4 + o(x^4) \quad \Rightarrow \quad \beta - 1 = 4 , \quad L = \frac{1}{\beta} \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{x^4} = \frac{1}{5} \cdot \Big(-\frac{7}{5}\Big) = -\frac{7}{25} .$$

PROBLEMA 3

Considerate la funzione $f(x) = \dfrac{2x^2}{1+x} + \dfrac{3}{2}\log\left((1+x)^2\right) - 3\log 2\,.$

a) **Determinatene il dominio, i limiti agli estremi del dominio, gli eventuali asintoti e le regioni di monotonia.**

b) **Tracciate un grafico approssimativo della funzione.**

c) **Determinate, al variare di** $k \in \mathbb{R}$**, il numero delle soluzioni dell'equazione** $f(x) = k$**.**

Bisogna evitare di iniziare scrivendo $\log(1+x)^2 = 2\log(1+x)$: infatti così facendo si perde metà del dominio, dato che $\log(1+x)^2 = 2\log|1+x|$.
Il dominio di f è $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, visto che per $x=-1$ si annullano sia il denominatore che l'argomento del logaritmo; abbiamo subito

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to(-1)^-} f(x) = -\infty\,,$$

dato che i primi due addendi di f divergono dalla stessa parte. Invece per $x\to-\infty$ e per $x\to(-1)^+$ i due addendi divergono da parti diverse, e dobbiamo sfruttare il fatto che la velocità del logaritmo è minore di quella delle potenze. Scrivendo

$$\frac{2x^2}{1+x} + \frac{3}{2}\log\left((1+x)^2\right) = (1+x)\left[\frac{2x^2}{(1+x)^2} + 3\boxed{\frac{\log|1+x|}{1+x}}\right]$$

la quantita' nel riquadro e' un o(1) per x che tende a + o - infinito

vediamo che per $x\to-\infty$ il contenuto della parentesi quadra tende a 2, quindi

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,;$$

invece scrivendo

$$\frac{2x^2}{1+x} + \frac{3}{2}\log\left((1+x)^2\right) = \frac{2x^2 + \boxed{3(1+x)\log|1+x|}}{1+x}$$

la quantita' nel riquadro e' un o(1) per x che tende a -1

per $x\to-1$ il numeratore tende a 2, dunque

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty\,.$$

Per determinare se esistono asintoti calcoliamo intanto

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2x}{1+x} + \frac{3}{2}\,\frac{\log\left((1+x)^2\right) - 3\log 2}{x}\right] = 2\,,$$

quindi il candidato coefficiente angolare è 2. Però

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - 2x\right) &= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2x^2 - 2x^2 - 2x}{1+x} + \frac{3}{2}\log\left((1+x)^2\right) - 3\log 2\right] \\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\left[-2 + \frac{3}{2}\log\left((1+x)^2\right) - 3\log 2\right] = +\infty\end{aligned}$$

e non esistono asintoti obliqui. L'unico asintoto presente è quello verticale in $x = -1$.
La derivata di f è

$$f'(x) = \frac{4x(1+x) - 2x^2}{(1+x)^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} \cdot 2(1+x) = \frac{4x + 2x^2 + 3 + 3x}{(1+x)^2} = \frac{2x^2 + 7x + 3}{(1+x)^2} \,.$$

Gli zeri della derivata, che è definita solo per $x \neq -1$, sono $x = -3$ e $x = -1/2$, la derivata è quindi positiva per $x < -3$ e per $x > -1/2$ mentre è negativa per $-3 < x < -1$ e per $-1 < x < -1/2$. Allora

$$\begin{gathered} f \text{ è strettamente crescente per } x \leq -3 \\ f \text{ è strettamente decrescente per } -3 \leq x < -1 \\ f \text{ è strettamente decrescente per } -1 < x \leq -1/2 \\ f \text{ è strettamente crescente per } x \geq -1/2 \,. \end{gathered}$$

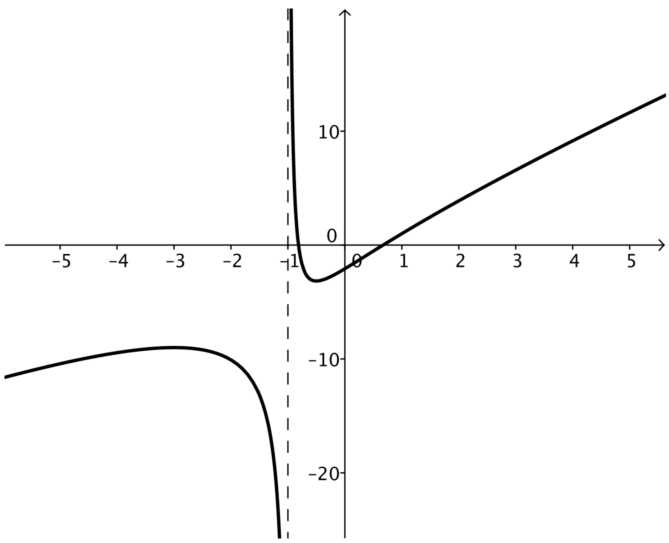
Il punto $x = -3$ è di massimo locale, mentre $x = -1/2$ è di minimo locale. Calcoliamo

$$\begin{aligned} f(-3) &= \frac{18}{-2} + 3\log|-2| - 3\log 2 = -9 \\ f(-1/2) &= \frac{2/4}{1/2} + 3\log(1/2) - 3\log 2 = 1 - 6\log 2 \ : \end{aligned}$$

osserviamo che $\log 2 < 1$, quindi $1 - 6\log 2 > 1 - 6 > -9$. Per tracciare meglio il grafico, vediamo se il valore del minimo locale è positivo o negativo:

$$1 - 6\log 2 < 0 \iff 1 < \log 2^6 \iff \mathrm{e} < 2^6$$

che è vero, e possiamo tracciare il grafico di f, qui molto compresso in verticale.



Per quanto detto sopra, la funzione f, che è continua e strettamente monotona (dunque iniettiva) su $]-\infty, -3]$, assume in tale intervallo una e una sola volta ciascun valore minore o uguale di -9. Ragionando allo stesso modo sugli intervalli $[-3,-1[$, $]-1,-1/2]$ e $[-1/2,+\infty[$ otteniamo che l'equazione $f(x)=k$ ha

$$\begin{aligned} \text{due soluzioni se } & k<-9 \\ \text{una soluzione se } & k=-9 \\ \text{nessuna soluzione se } & -9<k<1-6\log 2 \\ \text{una soluzione se } & k=1-6\log 2 \\ \text{due soluzioni se } & k>1-6\log 2\,. \end{aligned}$$

PROBLEMA 4

Determinate i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[1-\cos\Big(2\pi\frac{n+1}{n+2}\Big)\Big]^{\alpha}.$$

con questo simbolo si intende la serie, non la somma della serie

Abbiamo

$$2\pi\frac{n+1}{n+2}=2\pi\frac{n+2-1}{n+2}=2\pi-2\pi\frac{1}{n+2},$$

perciò dato che il coseno è pari e periodica di periodo 2*pigreco

$$\cos\Big(2\pi\frac{n+1}{n+2}\Big)=\cos\Big(2\pi-2\pi\frac{1}{n+2}\Big)=\cos\Big(-2\pi\frac{1}{n+2}\Big)=\cos\Big(2\pi\frac{1}{n+2}\Big).$$

Ora,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\cos\frac{2\pi}{n+2}}{1/n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{(n+2)^2}\cdot\frac{1-\cos\frac{2\pi}{n+2}}{[2\pi/(n+2)]^2}\cdot 4\pi^2=2\pi^2,$$

dunque per il criterio del confronto asintotico

$$\sum_{n}\Big[1-\cos\Big(2\pi\frac{n+1}{n+2}\Big)\Big]^{\alpha}\boxed{\simeq}\sum_{n}\frac{1}{n^{2\alpha}}$$

che converge se e solo se $2\alpha>1$, cioè $\alpha>1/2$.

con questo simbolo si intende che le due serie hanno lo stesso carattere

Esercizio 1. Un ragazzo ha tre monete da 50 centesimi, tre da 20 centesimi e tre da 10 centesimi, ma perde due monete da un buco nella tasca. Qual è la probabilità che abbia perso esattamente 70 centesimi?

(A) $1/4$.	(C) $\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{9}{2}^{-1}$.
(B) $1/9$.	(D) $(3/9) \cdot (3/8) \cdot (3/7)$.

L'unico modo per ottenere 70 centesimi con due monete è usare una da 50 e una da 20 centesimi, dunque si tratta di calcolare quante, fra le possibili coppie che si possono formare con le nove monete date, sono composte da una moneta da 50 e una da 20. Le coppie totali sono

$$\binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36 \,,$$

mentre per formare una coppia favorevole dobbiamo scegliere una moneta da 50 (che possiamo fare in tre modi diversi) e una da 20 (altri tre), quindi in totale $3 \cdot 3 = 9$ modi. La probabilità è allora $9/36 = 1/4$.

Esercizio 2. Data la funzione $f(x) = \arctan\sqrt{x^2+2}$, l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa 1 è

(A) $12y + \sqrt{3} = 4\pi + x\sqrt{3}$.	(C) $12y + x\sqrt{3} = 4\pi + \sqrt{3}$.
(B) $y = \sqrt{3} + \frac{1}{4}(x-1)$.	(D) nessuna delle altre risposte è vera.

L'equazione della retta tangente generica è

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \;:$$

dato che

$$f(1) = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}\,, \qquad f'(x) = \frac{1}{1+(x^2+2)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+2}} \cdot 2x \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{12}\,,$$

l'equazione cercata è

$$y = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{12}(x-1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 12y = 4\pi + x\sqrt{3} - \sqrt{3}\,.$$

Esercizio 3. Se $z = 2 + 7\mathrm{i}$ e $w = (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})/2$, quale dei seguenti numeri ha la parte reale più grande?

(A) zw.	(C) $z + w$.
(B) z/w.	(D) $z - w$.

Disegnando i punti z e w nel piano di Gauß vediamo che w ha modulo 1 e argomento $-\pi/3$, mentre z ha modulo assai maggiore (poco più di 7) ed è poco a destra dell'asse immaginario, avendo argomento fra $\pi/3$ e $\pi/2$. Allora i numeri $z \pm w$ sono non lontani da z e in particolare hanno parte reale $2 \pm 1/2 < 3$. Il numero zw si ottiene ruotando z di $\pi/3$ in senso orario, quindi sembra avere parte reale decisamente maggiore di 3: precisamente ha parte reale

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{7\sqrt{3}}{2} > 1 + \frac{7}{2} > 3 .$$

Questo è il numero con parte reale maggiore, dato che $z/w = z\bar{w}$ si ottiene ruotando z di $\pi/3$ in senso antiorario ed ha quindi parte reale negativa.

Esercizio 4. Se $|x+4| < 2$ e $|x-3| \geq 6$ allora

(A) $-6 < x \leq -3$.	(C) $x \leq -7$.
(B) $x \leq -6$ oppure $x \geq 9$.	(D) nessuna delle altre risposte è corretta.

Dalle note proprietà del valore assoluto,

$$\begin{cases} |x+4| < 2 \\ |x-3| \geq 6 \end{cases} \iff \begin{cases} -2 < x+4 < 2 \\ x-3 \leq -6 \text{ oppure } x-3 \geq 6 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -6 < x < -2 \\ x \leq -3 \text{ oppure } x \geq 9 \end{cases} \iff -6 < x \leq -3 .$$

Esercizio 5. I valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la serie $\sum_n \left((2\alpha-2)^{2n} + \frac{1}{(1+n^3)n^{3-2\alpha}} \right)$ è convergente sono

(A) $1/2 < \alpha < 3/2$.	(C) $\alpha < 1/2$ oppure $3/2 < \alpha < 5/2$
(B) $1/2 < \alpha < 3/2$ oppure $\alpha > 5/2$.	(D) $\alpha < 5/2$.

Osserviamo che $(2\alpha-2)^{2n} = [(2\alpha-2)^2]^n$, quindi la serie proposta è la somma di due serie a termini positivi, e converge se e solo se convergono entrambe le serie

$$\sum_n [(2\alpha-2)^2]^n \qquad \sum_n \frac{1}{(1+n^3)n^{3-2\alpha}} .$$

La prima è una serie geometrica con ragione positiva, che converge se e solo se

$$(2\alpha-2)^2 < 1 \quad \iff \quad -1 < 2\alpha - 2 < 1 \quad \iff \quad \frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2} .$$

Invece la seconda, per il criterio del confronto asintotico, ha lo stesso carattere di

$$\sum_n \frac{1}{n^{6-2\alpha}} ,$$

quindi converge se e solo se

$$6 - 2\alpha > 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha < \frac{5}{2}\,.$$

Entrambe le serie convergono se e solo se

$$\begin{cases} \frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2} \\ \alpha < \frac{5}{2} \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}\,.$$

Esercizio 6. L'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+9x^4}\,dx$ vale

(A) $\pi/12$.	(C) $+\infty$.
(B) $\pi/2$.	(D) 3π .

La derivata di $\arctan(3x^2)$ è

$$\frac{1}{1+9x^4} \cdot 6x\,,$$

quindi una primitiva di $x/(1+9x^4)$ è $(1/6)\arctan(3x^2)$ e

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+9x^4}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_0^{M} \frac{x}{1+9x^4}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \Big[\frac{1}{6}\arctan(3x^2)\Big]_0^M = \frac{1}{6}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{12}\,.$$

Esercizio 7. Per $x \to +\infty$ la funzione $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{2x}\right)^x - \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{(x^2+4x)/(2x^2+1)}$ tende a

(A) $3\sqrt{\mathrm{e}}/4$.	(C) $-\infty$.
(B) $+\infty$.	(D) $\sqrt{\mathrm{e}} - \mathrm{e}^2/4$.

Abbiamo

$$\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x = \left[\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{1/2} \to \mathrm{e}^{1/2}\,,$$

mentre

$$\frac{x^2+4x}{2x^2+1} \to \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4}\mathrm{e}^{(x^2+4x)/(2x^2+1)} \to \frac{\mathrm{e}^{1/2}}{4}\,,$$

quindi $f(x) \to 3\sqrt{\mathrm{e}}/4$.
