Compito n. 1 (Gennaio 2014)

PROBLEMA 1

Determinate le soluzioni (z, w), con $z, w \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} |z|^2 w - z|w|^2 = 0 \\ |w| - 2z + \mathrm{i}\sqrt{3} = 0 \, . \end{cases}$$

Riscriviamo la prima equazione come

$$z\bar{z}w - zw\bar{w} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad zw(\bar{z} - \bar{w}) = 0 \ :$$

allora o $z = 0$ o $w = 0$ o $\bar{z} - \bar{w} = 0$. Nel caso $z = 0$ la seconda equazione diviene $|w| = -\mathrm{i}\sqrt{3}$, impossibile perché il modulo di w è reale. Invece se $w = 0$ la seconda equazione dà subito $z = \mathrm{i}\sqrt{3}/2$, e abbiamo una soluzione. Rimane il terzo caso, quello $\bar{z} = \bar{w}$ e quindi $z = w$. Allora la seconda equazione diventa

$$2z = |z| + \mathrm{i}\sqrt{3} \iff z = \frac{|z|}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \, .$$

In particolare, dato che $|z|$ è un numero reale positivo, z ha parte reale maggiore di zero e parte immaginaria $\sqrt{3}/2$. Indicando con x la parte reale di z abbiamo allora

$$x > 0 \, , \qquad x = \frac{|z|}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 3/4}$$

da cui

$$x^2 + \frac{3}{4} = 4x^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad x = +\frac{1}{2}$$

dato che $x > 0$. In definitiva abbiamo due soluzioni:

$$z = \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \, , \quad w = 0 \qquad \text{e} \qquad z = w = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \, .$$

PROBLEMA 2

Per ogni $x \in [0, 2\pi]$ considerate la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1+\cos x}{2-\cos x}\Big)^n .$$

a) **Determinate per quali $x \in [0, 2\pi]$ la serie risulta convergente e, per tali x, calcolate la somma $S(x)$ della serie.**
b) **Determinate per quali $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $S(x) = k$ ha soluzioni.**

Si tratta di una serie geometrica di ragione

$$q = \frac{1+\cos x}{2-\cos x} ,$$

che converge se e solo se $-1 < q < 1$ e ha come somma $1/(1-q)$. Allora la serie converge se e solo se

$$-1 < \frac{1+\cos x}{2-\cos x} < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -(2-\cos x) < 1+\cos x < 2-\cos x$$

(dato che il denominatore è sempre positivo)

$$\Longleftrightarrow \qquad \cos x < \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3} .$$

Per tali valori di x la somma è

$$S(x) = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1+\cos x}{2-\cos x}} = \frac{\cos x - 2}{2\cos x - 1} .$$

Per $\pi/3 < x < 5\pi/3$ il coseno assume tutti i valori fra -1 compreso e $1/2$ escluso, quindi l'immagine della funzione $S(x)$ coincide, ponendo $\cos x = t$, con l'immagine della funzione

$$f(t) = \frac{t-2}{2t-1}$$

sull'intervallo $[-1, 1/2[$. Osserviamo che l'immagine di S, che è l'insieme dei valori k assunti da S, è l'insieme dei valori di k per i quali l'equazione $S(x) = k$ ha soluzione. Abbiamo

$$f(-1) = 1 , \qquad \lim_{t\to(1/2)^-} f(t) = +\infty , \qquad f'(t) = \frac{(2t-1)-2(t-2)}{(2t-1)^2} = \frac{3}{(2t-1)^2} > 0 ,$$

dunque f è strettamente crescente e l'immagine cercata è $[1, +\infty[$. Naturalmente non ci sarebbe stata particolare difficoltà nello studio diretto della funzione $S(x)$.

PROBLEMA 3

Considerate la funzione $f(x) = \arctan\bigl(\log(1+x)\bigr) - \log(1+\arctan x)$.
a) Determinatene l'ordine di infinitesimo e la parte principale per $x \to 0$.
b) Calcolate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^4 + x^\alpha} \,.$$

Abbiamo

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)$$
$$\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^4)$$

perciò

$$\begin{aligned}\arctan\bigl(\log(1+x)\bigr) &= \Bigl(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\Bigr) - \frac{(\cdots)^3}{3} + o(\cdots)^4 \\ &= \Bigl(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\Bigr) - \frac{1}{3}\Bigl(x^3 - 3x^2\frac{x^2}{2}\Bigr)\end{aligned}$$

dato che $\log(1+x)$ è un infinitesimo di ordine 1 e quindi $o(\cdots)^4 = o(x^4)$, quindi

$$\cdots = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) \,.$$

Invece

$$\begin{aligned}\log(1+\arctan x) &= \Bigl(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\Bigr) - \frac{1}{2}(\cdots)^2 + \frac{1}{3}(\cdots)^3 - \frac{1}{4}(\cdots)^4 + o(\cdots)^4 \\ &= \Bigl(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\Bigr) - \frac{1}{2}\Bigl(x^2 - \frac{2}{3}x^4\Bigr) + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \,,\end{aligned}$$

di nuovo perché $\arctan x$ è un infinitesimo di ordine 1 , quindi

$$\cdots = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + o(x^4) \,.$$

Allora

$$f(x) = \frac{x^4}{6} + o(x^4) \,.$$

Osserviamo che

$$x^4 + x^\alpha = \begin{cases} x^4 + o(x^4) & \text{se } \alpha > 4 \\ 2x^4 & \text{se } \alpha = 4 \\ x^\alpha + o(x^\alpha) & \text{se } \alpha < 4 \end{cases}$$

perciò

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^4 + x^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4/6 + o(x^4)}{x^4 + x^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4\bigl(1/6 + o(x^4)/x^4\bigr)}{x^4 + x^\alpha} = \begin{cases} 1/6 & \text{se } \alpha > 4 \\ 1/12 & \text{se } \alpha = 4 \\ 0 & \text{se } \alpha < 4. \end{cases}$$

PROBLEMA 4

Calcolate l' integrale generalizzato $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\arctan(2/x)}{4+x^2}\,dx$ **.**

Si tratta dell' integrale di una funzione positiva, perciò converge o diverge positivamente, e dobbiamo calcolare

$$\lim_{M\to+\infty}\int_2^M \frac{\arctan(2/x)}{4+x^2}\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ x=2t}}{=} \lim_{M\to+\infty}\int_1^{M/2} \frac{\arctan(1/t)}{4(1+t^2)}\cdot 2\,dt$$
$$\underset{\substack{\uparrow\\ t=1/s}}{=} \frac{1}{2}\lim_{M\to+\infty}\int_1^{2/M} \frac{\arctan s}{1+1/s^2}\cdot\frac{-1}{s^2}\,ds\,.$$

Dato che $M\to+\infty \iff 2/M\to 0^+$, possiamo riscriverlo (invertendo anche l'ordine degli estremi di integrazione)

$$\cdots = +\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{\arctan s}{1+s^2}\,ds = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\arctan s}{1+s^2}\,ds = \left[\frac{1}{4}\arctan^2 s\right]_0^1 = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{\pi^2}{64}\,.$$

Esercizio 1. Un originale albero si alza di 10 cm al giorno al lunedì, martedì, mercoledì e giovedì, si abbassa di 3 cm al giorno al venerdì e al sabato, e infine la domenica riposa. Un certo giorno misura 88 cm. Qual è la probabilità che dopo 4 giorni sia alto 92 cm?

(A) $2/7$.	(C) $3/10$.
(B) $27/100$.	(D) $27/70$.

Vediamo qual è l' innalzamento dell'albero in quattro giorni, a seconda del giorno della settimana da cui si parte: se iniziamo a contare al lunedì, dopo quattro giorni l'albero si è alzato per quattro volte di 10 cm, quindi è cresciuto di 40 cm; se iniziamo al martedì invece l'albero cresce per tre volte (MMG) di 10 cm, poi (V) si abbassa di 3, per un innalzamento totale di 27 cm. Proseguendo otteniamo la seguente lista di accrescimenti dopo quattro giorni:

L: 40, Ma: 27, Me: 14, G: 4, V: 4, S: 17, D: 30.

Dato che l' innalzamento richiesto (che è di 4 cm) si verifica in 2 casi su 7, la probabilità è $2/7$.

Esercizio 2. Sotto quale di queste condizioni la funzione f ha certamente minimo su $]0,1]$?

(A) f è continua e $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(1)$.	(C) f è derivabile e $f'(1) = 0$.
(B) f è strettamente crescente.	(D) f è derivabile e $f'(1) < 0$.

Iniziamo scartando le risposte errate: se f è strettamente crescente è sicuro che il minimo non ce l'abbia, dato che l'estremo inferiore di f è il limite per $x \to 0^+$, e questo valore non viene assunto. La funzione $f(x) = 2x - x^2$ è derivabile con $f'(1) = 0$, ma non ha minimo perché su $]0,1]$ è strettamente positiva e $\inf_{]0,1]} f = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Lo stesso si può dire per $f(x) = 3x - 2x^2$, che ha $f'(1) < 0$, quindi la risposta esatta è la rimanente. La proprietà è una conseguenza di un corollario del teorema di Weierstrass (se $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ è continua e $f(a) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ allora f ha massimo e minimo). Per chi non la ricordasse, diamo una dimostrazione: consideriamo la funzione

$$g(x) = \begin{cases} f(1) & \text{se } x = 0 \\ f(x) & \text{se } 0 < x \leq 1: \end{cases}$$

questa è continua su $[0,1]$, dato che per $x_0 > 0$ coincide con la funzione continua f in un intorno di x_0 , e per $x_0 = 0$ è

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = f(1) = g(0) \ .$$

Allora per il teorema di Weierstraßla funzione g ha (massimo e) minimo su $[0,1]$; chiamiamo x_m un punto di minimo di g : dato che $g(0) = f(1) = g(1)$, possiamo supporre che sia $x_m \neq 0$, perché se è 0 lo sostituiamo con 1 ove g ha lo stesso valore. Allora in particolare

$$g(x_m) \leq g(x) \quad \forall x \in]0,1] \ ,$$

ma $x_m \neq 0$ quindi $f(x_m) = g(x_m)$, e per ogni $x \in]0,1]$ è $f(x) = g(x)$, quindi la formula precedente si riscrive

$$f(x_m) \leq f(x) \quad \forall x \in]0,1] \ .$$

Esercizio 3. Se $z \in \mathbb{C}$ ha modulo 4 e parte reale uguale a 2, allora sicuramente

(A) $|\Im z| = 2\sqrt{3}$.

(B) z ha argomento $\pi/3 + 2k\pi$, dove $k \in \mathbb{Z}$.

(C) z^2 ha parte reale positiva.

(D) $\Im z = \pm 2$.

Dato che $|z|^2 = (\Re z)^2 + (\Im z)^2$ abbiamo

$$(\Im z)^2 = |z|^2 - (\Re z)^2 = 16 - 4 = 12 \quad \Rightarrow \quad \Im z = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3} \ .$$

In particolare

$$z = 4\frac{1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$$

perciò l'argomento di z è (a meno di multipli interi di 2π) uguale a $\pm\pi/3$. Allora l'argomento di z^2 è $\pm 2\pi/3$ quindi z^2 è nel secondo o terzo quadrante, e ha parte reale negativa.

Esercizio 4. La funzione $x + \sqrt{x^2 + 6x}$ per $x \to -\infty$ ha limite

(A) -3.

(B) $+\infty$.

(C) $-\infty$.

(D) 6.

L'argomento della radice tende a $+\infty$ perciò la radice tende a $+\infty$, mentre $x \to -\infty$ e siamo nella forma $\infty - \infty$. Ricordando che $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ per $x < 0$, scriviamo

$$x + \sqrt{x^2 + 6x} = \frac{\left(\sqrt{x^2 + 6x} + x\right)\left(\sqrt{x^2 + 6x} - x\right)}{\sqrt{x^2 + 6x} - x} = \frac{6x}{-x\sqrt{1 + 6/x} - x} = \frac{-6}{\sqrt{1 + 6/x} + 1}$$

che tende a -3 dato che il denominatore tende a 2.

Esercizio 5. L'integrale generalizzato $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha + 3x^2}{2x^4 + 4x^\alpha}\,dx$ dipendente dal parametro $\alpha > 0$ risulta convergente se e solo se

(A) $\alpha < 3$.

(B) $\alpha < 4$.

(C) $\alpha > 3$.

(D) $2 < \alpha < 3$.

Si tratta dell'integrale di una funzione positiva, quindi converge o diverge positivamente, e per studiarne la convergenza esaminiamo il comportamento all'infinito. Al numeratore domina x^α se $\alpha > 2$, domina x^2 se $\alpha \leq 2$ (abbiamo incluso $\alpha = 2$, caso in cui dire x^α

o x^2 è indifferente). Al denominatore la situazione è analoga, con spartiacque $\alpha = 4$. Studiamo perciò i vari casi:

$$\begin{aligned}
\alpha \le 2 \quad &\Rightarrow \quad \frac{x^\alpha + 3x^2}{2x^4 + 4x^\alpha} \sim \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2} \\
2 < \alpha \le 4 \quad &\Rightarrow \quad \frac{x^\alpha + 3x^2}{2x^4 + 4x^\alpha} \sim \frac{x^\alpha}{x^4} = \frac{1}{x^{4-\alpha}} \\
\alpha > 4 \quad &\Rightarrow \quad \frac{x^\alpha + 3x^2}{2x^4 + 4x^\alpha} \sim \frac{x^\alpha}{x^\alpha} = x^0 .
\end{aligned}$$

Allora per $\alpha \le 2$ l'integrale converge sempre e per $\alpha > 4$ diverge sempre, mentre per gli α fra 2 e 4 dobbiamo ancora fare un piccolo calcolo: l'integrale di $1/x^{4-\alpha}$ converge all'infinito se l'esponente è maggiore di 1, quindi se $(2 <)\alpha < 3$ — il "$2 <$" dipende dal fatto che siamo nel caso $2 < \alpha \le 4$. Unendo i vari casi, la convergenza si ha per $\alpha < 3$.

Esercizio 6. Sia $\alpha > 0$. La serie $\displaystyle\sum_{n\ge1}\Big(\frac{1}{n^{\alpha/2}} + |\alpha - 5/2|^n\Big)$ converge se e solo se

(A) $2 < \alpha < 7/2$.	(C) $3/2 < \alpha < 7/2$.
(B) $\alpha > 2$.	(D) $3/2 < \alpha < 2$.

Il termine generico della serie è la somma di due quantità positive, perciò

$$\sum_{n\ge1}\Big(\frac{1}{n^{\alpha/2}} + |\alpha - 5/2|^n\Big) = \Big(\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^{\alpha/2}}\Big) + \Big(\sum_{n\ge1}|\alpha - 5/2|^n\Big)$$

e si ha convergenza se e solo se entrambe le serie convergono. La prima è una serie armonica generalizzata e converge se $\alpha/2 > 1$, cioè se $\alpha > 2$. Invece la seconda è una serie geometrica, che converge se e solo se la sua ragione (che è positiva) è minore di 1. La disuguaglianza

$$|\alpha - 5/2| < 1$$

è risolta dai numeri α che distano meno di 1 da $5/2$, quindi per

$$3/2 = 5/2 - 1 < \alpha < 5/2 + 1 = 7/2 .$$

Dato che $3/2 < 2$, la convergenza della serie somma si ha per $2 < \alpha < 7/2$.

Esercizio 7. La derivata di $F(x) = \displaystyle\int_x^{x+\pi} \operatorname{sen}(t^2)\,dt$ in $x_0 = 0$ è

(A) $F'(0) = \operatorname{sen}(\pi^2)$.	(C) $F'(0) = \int_0^\pi \cos(t^2)\,dt$.
(B) $F'(0) = \pi\operatorname{sen}(\pi^2)$.	(D) $F'(0) = 0$.

Scriviamo $G(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt$, così che

$$F(x) = G(x+\pi) - G(x) .$$