Risoluzione del compito n. 2 (Febbraio 2014/1)

PROBLEMA 1

Determinate le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ del sistema

$$\begin{cases} (z+\bar z)(z-\bar z) = 4\mathrm{i} \\ |z|^2 = 5 - 3(\Im z)^2 \,. \end{cases}$$

Dato che nella seconda equazione compare esplicitamente $\Im z$, sembra inevitabile porre $z = x + \mathrm{i}y$, tanto più che la prima equazione, ricordando che $z + \bar z = 2\Re z$ e che $z - \bar z = 2\mathrm{i}\Im z$, assume una forma eccellente: il sistema diventa

$$\begin{cases} (2x)(2\mathrm{i}y) = 4\mathrm{i} \\ x^2 + y^2 = 5 - 3y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} xy = 1 \\ x^2 + 4y^2 = 5 \,. \end{cases}$$

Per la prima equazione non può essere $x = 0$, perciò possiamo proseguire

$$\cdots \iff \begin{cases} y = 1/x \\ x^2 + \frac{4}{x^2} = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1/x \\ (x^2)^2 - 5x^2 + 4 = 0 \,. \end{cases}$$

Dall'ultima equazione ricaviamo

$$x^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases} \iff x = \begin{cases} \pm 2 \\ \pm 1 \end{cases}$$

e per ciascun valore della parte reale x ricaviamo la corrispondente parte immaginaria $y = 1/x$, ottenendo così quattro soluzioni del sistema originario:

$$\pm\Big(2 + \frac{1}{2}\mathrm{i}\Big)\,, \qquad \pm(1 + \mathrm{i})\,.$$

PROBLEMA 2

Sia $f(x) = \operatorname{sen} x - \mathrm{e}^{-x} + (\cos x)\mathrm{e}^{-2x-x^2-\frac{1}{6}x^4}$.
a) Calcolate il polinomio di Taylor di ordine 4 di f, centrato in $x_0 = 0$.
b) Calcolate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - \alpha x^3}{x^4} .$$

I primi due termini non pongono problemi:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} x - \mathrm{e}^{-x} &= \Big(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\Big) - \Big(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\Big) \\ &= -1 + 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) .\end{aligned}$$

Per il termine rimanente, lo sviluppo del coseno inizia con 1, dunque dovremo sviluppare l'esponenziale fino a $o(x^4)$. Analogamente lo sviluppo dell'esponenziale inizia con 1 e dovremo sviluppare anche il coseno fino a $o(x^4)$. Dato che l'argomento dell'esponenziale è un infinitesimo di ordine 1, per ottenere $o(x^4)$ dobbiamo usare lo sviluppo

$$\mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + o(t^4) \ :$$

infatti per $t = -2x - x^2 - x^4/6 = -2x + o(x)$ abbiamo $o(t^4) = o(x^4)$. Ricaviamo

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{-2x-x^2-\frac{1}{6}x^4} \\ &\quad = 1 + \Big(-2x - x^2 - \frac{1}{6}x^4\Big) + \frac{1}{2}(\cdots)^2 + \frac{1}{6}(\cdots)^3 + \frac{1}{24}(\cdots)^4 + o(\cdots)^4 \\ &\quad = 1 - 2x - x^2 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2}(4x^2 + 4x^3 + x^4) + \frac{1}{6}(-8x^3 - 12x^4) + \frac{1}{24}\cdot 16x^4 + o(x^4) \\ &\quad = 1 - 2x + (-1+2)x^2 + \Big(2 - \frac{4}{3}\Big)x^3 + \Big(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - 2 + \frac{2}{3}\Big)x^4 + o(x^4) \\ &\quad = 1 - 2x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 - x^4 + o(x^4) .\end{aligned}$$

Dato che $\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)$ otteniamo

$$\begin{aligned}(\cos x)\mathrm{e}^{-2x-x^2-\frac{1}{6}x^4} &= \Big(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\Big)\Big(1 - 2x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 - x^4 + o(x^4)\Big) \\ &= 1 - 2x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 - x^4 + o(x^4) - \frac{x^2}{2}(1 - 2x + x^2) + \frac{x^4}{24} \\ &= 1 - 2x + \Big(1 - \frac{1}{2}\Big)x^2 + \Big(\frac{2}{3} + 1\Big)x^3 + \Big(-1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24}\Big)x^4 + o(x^4) \\ &= 1 - 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{3}x^3 - \frac{35}{24}x^4 + o(x^4) .\end{aligned}$$

Sommando a questo lo sviluppo dei primi addendi ricavato all'inizio abbiamo infine

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(-1+2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)+\left(1-2x+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{3}x^3-\frac{35}{24}x^4+o(x^4)\right) \\ &= \frac{5}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)\ . \end{aligned}$$

A questo punto osserviamo che per $x \neq 0$

$$\frac{f(x)-\alpha x^3}{x^4} = \frac{(5/3-\alpha)x^3-(3/2)x^4+o(x^4)}{x^4} = \left(\frac{5}{3}-\alpha\right)\cdot\frac{1}{x}-\frac{3}{2}+\frac{o(x^4)}{x^4}\ ,$$

pertanto abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-\alpha x^3}{x^4} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 5/3 \\ -3/2 & \text{se } \alpha = 5/3 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 5/3. \end{cases}$$

PROBLEMA 3

Considerate la funzione $f(x) = 2\log(x^2 + 2x + 2) - x^2 - 2x$.

a) **Trovatene i limiti agli estremi del dominio e gli intervalli di monotonia. Disegnate poi un grafico di f .**

b) **Determinate al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.**

c) **Determinate la primitiva della funzione $f(x)$ che si annulla nel punto $x_0 = -1$.**

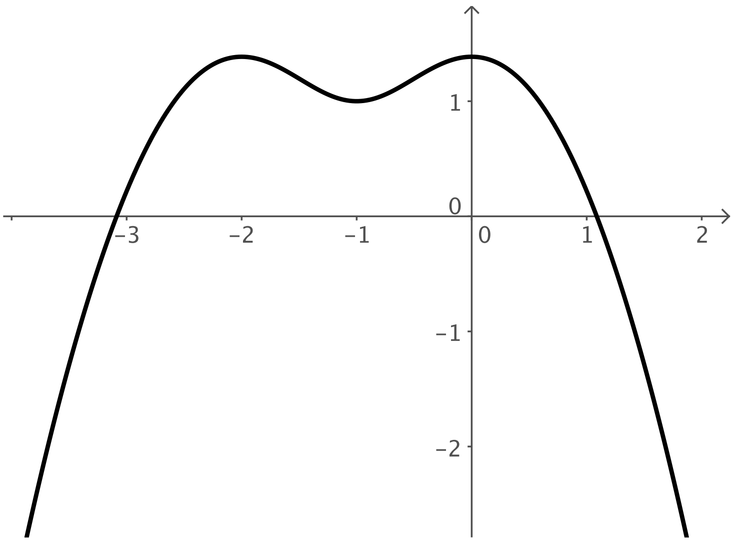
L'argomento del logaritmo è $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1 \geq 1$ per ogni x , quindi il dominio di f è tutto $\mathbb{R}$. Osserviamo che potremmo scrivere anche

$$f(x) = 2\log\bigl(1+(x+1)^2\bigr) - x^2 - 2x - 1 + 1 = 2\log\bigl(1+(x+1)^2\bigr) - (x+1)^2 + 1 = g(x+1)$$

con

$$g(t) = 2\log(1+t^2) - t^2 + 1$$

e studiare g , dopo di che il grafico di f si ottiene traslando a sinistra di una unità quello di g . Il vantaggio è che g è pari, ma non seguiamo questa strada rimanendo a calcoli standard.



All' infinito il termine dominante in f è la potenza $-x^2$, pertanto

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \; .$$

Per determinare gli intervalli di monotonia calcoliamo

$$f'(x) = 2\frac{2x+2}{x^2+2x+2} - 2x - 2 = 2(x+1)\Bigl(\frac{2}{1+(x+1)^2} - 1\Bigr) = 2(x+1)\frac{1-(x+1)^2}{1+(x+1)^2} \; .$$

Il numeratore della frazione è positivo per $|x+1| < 1$, ovvero per $-2 < x < 0$, e il termine $x+1$ è positivo per $x > -1$, pertanto f' è positiva per $x < -2$ e per $-1 < x < 0$, nulla in -2, -1 e 0 e negativa per $-2 < x < -1$ e per $x > 0$. Allora f è strettamente crescente in $]-\infty, -2]$ e in $[-1, 0]$, strettamente decrescente in $[-2, -1]$ e in $[0, +\infty[$. Il punto $x = -1$ è di minimo locale, e $f(-1) = 1$. Invece i punti -2 e 0 sono di massimo locale e

$$f(-2) = 2\log 2 = f(0)$$

che è il massimo di f, e si può tracciare il grafico di f.
Per la stretta monotonia di f nell' intervallo $]-\infty, -2]$, essa è iniettiva e, dato che è continua, per il teorema dei valori intermedi assume (in questo intervallo) una e una sola volta tutti i valori fra

$$-\infty = \lim_{x\to-\infty} f(x) \qquad \text{e} \qquad 2\log 2 = f(-2)$$

compreso. Analogamente, in $[-2, -1]$ assume una e una sola tutti i valori fra 1 e $2\log 2$ e così via sugli altri intervalli. In conclusione l'equazione $f(x) = k$ ha

due soluzioni	se $k < 1$
tre soluzioni	se $k = 1$
quattro soluzioni	se $1 < k < 2\log 2$
due soluzioni	se $k = 2\log 2$
nessuna soluzione	se $k > 2\log 2$.

Passiamo all'ultimo punto dell'esercizio: calcoliamo l' integrale indefinito

$$\int f(x)\,dx \underset{x+1=t}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} \int \bigl(2\log(1+t^2) - t^2 + 1\bigr)\,dt\,.$$

Gli ultimi due addendi non danno problemi, l'altro lo trattiamo integrando per parti:

$$\begin{aligned}\int \log(1+t^2)\,dt &= t\log(1+t^2) - \int t\frac{2t}{1+t^2}\,dt = t\log(1+t^2) - 2\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,dt \\ &= t\log(1+t^2) - 2t + 2\arctan t + c\,,\end{aligned}$$

quindi

$$\int \bigl(2\log(1+t^2) - t^2 + 1\bigr)\,dt = 2t\log(1+t^2) - 4t + 4\arctan t - \frac{t^3}{3} + t + c\,.$$

Prima di risostituire $t = x+1$ calcoliamo c, osservando che $x = -1 \iff t = 0$, quindi $c = 0$. Allora la primitiva cercata è

$$\begin{aligned}&2t\log(1+t^2) - 4t + 4\arctan t - \frac{t^3}{3} + t \\ &\quad \underset{t=x+1}{\underset{\uparrow}{=}} 2(x+1)\log(x^2+2x+2) + 4\arctan(x+1) - \frac{(x+1)^3}{3} - 3(x+1) \\ &\quad = 2(x+1)\log(x^2+2x+2) + 4\arctan(x+1) - \frac{x^3}{3} - x^2 - 4x - \frac{10}{3}\,.\end{aligned}$$

PROBLEMA 4

Sia $\boldsymbol{a_n = \int_n^{n+1} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx}$ **.**

a) **Calcolate** $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} a_n}$ **.**

b) **Calcolate la somma** $\boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty} a_n}$ **.**

c) **Determinate per quali** $\boldsymbol{\alpha \in \mathbb{R}}$ **converge la serie** $\boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{\alpha}}$ **.**

Si trova subito

$$a_n = \Big[\frac{1}{2}(\arctan x)^2\Big]_n^{n+1} = \frac{\arctan^2(n+1) - \arctan^2 n}{2} ,$$

perciò $a_n \to 0$, e dato che ci servirà poi osserviamo che $a_n > 0$ essendo un integrale di una funzione positiva su un intervallo orientato in verso crescente. Dato poi che

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n}\Big(\frac{1}{2}\arctan^2(k{+}1) - \frac{1}{2}\arctan^2 k\Big) = \Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}\arctan^2(k{+}1)\Big) - \Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}\arctan^2 k\Big)$$

e che

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}\arctan^2(k+1) = \sum_{h=1}^{n+1}\frac{1}{2}\arctan^2 h = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2}\arctan^2 k ,$$

abbiamo (come sempre in una serie telescopica)

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{1}{2}\arctan^2(n+1) - \frac{1}{2}\arctan^2(0) = \frac{1}{2}\arctan^2(n+1) \to \frac{\pi^2}{8} ,$$

quindi la somma della serie è $\pi^2/8$.
L'ultimo punto è più delicato, e dopo aver osservato che si tratta di una serie a termini positivi lo svolgiamo in due modi: intanto

$$a_n = \frac{1}{2}\big(\arctan(n{+}1) + \arctan n\big)\big(\arctan(n{+}1) - \arctan n\big) \simeq c\big(\arctan(n{+}1) - \arctan n\big) .$$

Poi, ricordando che per $x > 0$ è $\arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2$, possiamo scrivere per $n \geq 1$

$$\begin{aligned}\arctan(n+1) - \arctan n &= \arctan\frac{1}{n} - \arctan\frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) - \Big[\frac{1}{n+1} + o\Big(\frac{1}{(n+1)^2}\Big)\Big] = \frac{1}{n^2+n} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) ,\end{aligned}$$

da cui

$$a_n = \simeq \frac{c}{n^2} .$$

Allora $\sum a_n^\alpha \simeq \sum 1/n^{2\alpha}$ converge per $\alpha > 1/2$.
Un secondo modo è osservare che la funzione integranda nella definizione di a_n, per n grande, è circa come $1/x^2$, quindi ci si può aspettare che il suo integrale fra n e $n+1$ valga circa $1/n^2$. Per far le cose precise stimiamo così: per $n \geq 1$ abbiamo

$$n \leq x \leq n+1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} \leq \arctan x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ n^2 \leq 1 + x^2 \leq 1 + (n+1)^2 \leq n^2 + (n+n)^2 \leq 5n^2 \, , \end{cases}$$

quindi

$$\frac{\pi/20}{n^2} = \int_n^{n+1} \frac{\pi/4}{5n^2}\, dx \leq a_n \leq \int_n^{n+1} \frac{\pi/2}{n^2}\, dx = \frac{\pi/2}{n^2}$$

e

$$\frac{(\pi/20)^\alpha}{n^{2\alpha}} \leq a_n^\alpha \leq \frac{(\pi/2)^\alpha}{n^{2\alpha}} \ :$$

per il teorema di confronto la serie ha lo stesso carattere di $\sum 1/n^{2\alpha}$ e converge se e solo se $\alpha > 1/2$.

Esercizio 1. La successione $\dfrac{\frac{4}{n^3}\cos n! - \frac{2}{n}\operatorname{sen}\frac{5}{n}}{\sqrt{2n^6+3n}-\sqrt{2n^6-n}}$ tende a

(A) $-5\sqrt{2}$.

(B) $-\infty$.

(C) $-6/5$.

(D) 0.

Osserviamo che

$$\frac{\operatorname{sen}(5/n)}{5/n} \to 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{n}\operatorname{sen}\frac{5}{n} = \frac{10}{n^2}\frac{\operatorname{sen}(5/n)}{5/n} ,$$

mentre l'altro termine al numeratore è trascurabile dato che va come $1/n^3$. Allora riscriviamo il numeratore come

$$\frac{4}{n^3}\cos n! - \frac{2}{n}\operatorname{sen}\frac{5}{n} = -\frac{10}{n^2}\Big(\frac{\operatorname{sen}(5/n)}{5/n} - \frac{2}{5n}\cos n!\Big) \simeq -\frac{10}{n^2} ,$$

perché la quantità fra parentesi tende a 1. Al denominatore abbiamo

$$\begin{aligned}\sqrt{2n^6+3n}-\sqrt{2n^6-n} &= \frac{(2n^6+3n)-(2n^6-n)}{\sqrt{2n^6+3n}+\sqrt{2n^6-n}} \\ &= \frac{4n}{n^3\big(\sqrt{2+3/n^5}+\sqrt{2-1/n^5}\big)} \simeq \frac{\sqrt{2}}{n^2}\end{aligned}$$

perché le due radici tendono ciascuna a $\sqrt{2}$. Allora

$$\frac{\frac{4}{n^3}\cos n! - \frac{2}{n}\operatorname{sen}\frac{5}{n}}{\sqrt{2n^6+3n}-\sqrt{2n^6-n}} \simeq \frac{-10/n^2}{\sqrt{2}/n^2} \to -5\sqrt{2} .$$

Esercizio 2. I valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 5\operatorname{sen}(\pi x) - 3|x| + 2x & \text{se } |x| < 1 \\ ax + bx^2 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

risulta continua su $\mathbb{R}$ sono

(A) $b = -3$, $a = 2$.

(B) $b = 0$, $a = -1$.

(C) $a = 1/2$, b qualsiasi.

(D) $b = 0$, a qualsiasi.

Dobbiamo vedere quando f è continua in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Definiamo le funzioni

$$f_1(x) = 5\operatorname{sen}(\pi x) - 3|x| + 2x , \qquad f_2(x) = ax + bx^2 \ :$$

queste sono definite su $\mathbb{R}$ e sono continue perché composizione e somma di funzioni continue. Se $-1 < x_0 < 1$ la funzione f coincide con f_1 in un intorno di x_0, dunque per la località della continuità anche f è continua in x_0. Se $x_0 < -1$ o $x_0 > 1$ allora

f coincide con f_2 in un intorno di x_0, e di nuovo risulta continua. Dobbiamo solo controllare la continuità in $x_0 = -1$ e in $x_0 = 1$. Abbiamo

$$f(-1) = -a + b\,, \qquad \lim_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim_{x\to(-1)^-} f_2(x) = \lim_{x\to-1} f_2(x) = f_2(-1) = -a + b\,,$$

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+} f_1(x) = \lim_{x\to-1} f_1(x) = f_1(-1) = -5\,.$$

Analogamente

$$f(1) = a + b\,, \qquad \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} f_1(x) = -1\,, \qquad \lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} f_2(x) = a + b\,.$$

Perché f sia continua in $x_0 = -1$ occorre che $-a + b = -5$, perché sia continua in $x_0 = 1$ occorre che $a + b = -1$, pertanto

$$\begin{cases} -a + b = -5 \\ a + b = -1 \end{cases} \iff \quad a = 2\,, \quad b = -3\,.$$

Esercizio 3. Quale dei seguenti integrali vale $+\infty$?

(A) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx\,.$

(B) $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx\,.$

(C) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x}\,dx\,.$

(D) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\,.$

Per tutti gli integrali, l'unico eventuale punto di improprietà è lo zero; osserviamo subito che si tratta in ogni caso di integrande positive, per cui si possono applicare i criteri di confronto abituali. Ricordando che $\operatorname{sen} t/t \to 1$ per $t \to 0$ abbiamo

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x^2} \simeq \frac{1}{x}\,, \qquad \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \simeq 1\,, \qquad \frac{\operatorname{sen} x^2}{x} \simeq x\,, \qquad \frac{\operatorname{sen} x}{x} \simeq 1\,.$$

In particolare tutte le funzioni hanno integrale convergente vicino a zero, salvo quella che si comporta come $1/x$.

Esercizio 4. Se $z \in \mathbb{C}$ è una qualunque soluzione dell'equazione $z^2 + 2z + (1 - \mathrm{i}) = 0$ allora

(A) $\Re z - \Im z = -1\,.$

(B) $\Re z > 0\,.$

(C) $\Im z < 0\,.$

(D) $\Re z + \Im z = \sqrt{2} - 1\,.$

Risolviamo l'equazione:

$$z = -1 \pm \sqrt{1 - (1 - \mathrm{i})} = -1 \pm \sqrt{\mathrm{i}} = -1 \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\,.$$

In particolare entrambe le radici hanno parte reale negativa, una delle radici ha parte immaginaria positiva, la somma di parte reale e parte immaginaria vale $-1\pm\sqrt{2}$ e quindi tre risposte sono errate. La restante è esatta perché

$$\Re z - \Im z = \Big(-1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\Big) - \Big(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\Big) = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \mp \frac{\sqrt{2}}{2} = -1 \, .$$

Esercizio 5. Dato il parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_n n^\alpha \big[\log(n+1) - \log n\big]$

(A) converge per ogni $\alpha < 0$.

(B) converge per qualche $\alpha > 0$.

(C) diverge negativamente per almeno un valore di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(D) converge se e solo se $\alpha < -1$.

Si tratta di una serie a termini positivi, e

$$\log(n+1) - \log n = \log\frac{n+1}{n} = \log\Big(1+\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

perciò

$$n^\alpha\big[\log(n+1) - \log n\big] = n^\alpha\Big[\frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big] \sim n^\alpha \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^{1-\alpha}} \, ,$$

che converge se e solo se $1-\alpha < 1$.

Esercizio 6. La retta tangente al grafico di $f(x) = x^{-x}$ nel punto di ascissa $x_0 = \mathrm{e}$ ha equazione

(A) $y = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}} - 2(x-\mathrm{e})\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}$.

(B) $y = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}} - x\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}$.

(C) $y = -\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}(x-\mathrm{e}) + \mathrm{e}^{-\mathrm{e}}$.

(D) $y = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}} - 2x\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}$.

L'equazione della retta tangente è

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \, ,$$

e $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}}$. Calcoliamo la derivata:

$$f(x) = x^{-x} = \mathrm{e}^{-x\log x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \mathrm{e}^{-x\log x}(-1-\log x) = x^{-x}(-1-\log x) \, ,$$

Perciò $f'(\mathrm{e}) = -2\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}$ e l'equazione della retta tangente è

$$y = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}} - 2\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}(x-\mathrm{e}) \, .$$

Esercizio 7. Sia S l'insieme delle soluzioni della disequazione $|2+3x| > |4-x|$. Allora

(A) $[1,3] \subseteq S$.

(B) $[-3,-1] \subseteq S$.

(C) S è limitato.

(D) $[-6,-4] \not\subseteq S$.

Il modo più rapido di procedere è ricordare che

$$a, b \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Big[a > b \iff a^2 > b^2\Big] ,$$

quindi trattandosi di valori assoluti (che sono certamente maggiori o uguali a zero)

$$|2+3x| > |4-x| \quad \iff \quad |2+3x|^2 > |4-x|^2 \quad \iff \quad (2+3x)^2 > (4-x)^2$$

visto che $|a|^2 = a^2$, quindi

$$\cdots \quad \iff \quad 9x^2 + 12x + 4 > x^2 - 8x + 16 \quad \iff \quad 4(2x^2 + 5x - 3) > 0 ,$$

che ha soluzione $x < -3$ oppure $x > 1/2$, pertanto

$$S =]-\infty, -3[\cup]1/2, +\infty[.$$

Dato che la situazione è molto semplice, avremmo potuto anche studiare separatamente i tre casi $x < -2/3$, $-2/3 \leq x < 4$ e $x \geq 4$. Nel primo caso abbiamo

$$\begin{aligned} \begin{cases} x < -2/3 \\ |2+3x| > |4-x| \end{cases} \quad &\iff \quad \begin{cases} x < -2/3 \\ -2-3x > 4-x \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} x < -2/3 \\ x < -3 \end{cases} \quad \iff \quad x < -3 , \end{aligned}$$

quindi $]-\infty, -3[\subset S$, il che ci fa scartare già due risposte.

Nel secondo caso abbiamo

$$\begin{aligned} \begin{cases} -2/3 \leq x < 4 \\ |2+3x| > |4-x| \end{cases} \quad &\iff \quad \begin{cases} -2/3 \leq x < 4 \\ 2+3x > 4-x \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} -2/3 \leq x < 4 \\ x > 1/2 \end{cases} \quad \iff \quad 1/2 < x < 4 \end{aligned}$$

e abbiamo anche $]1/2, 4[\subset S$, così possiamo già individuare la risposta esatta. Proseguiamo comunque con l'ultimo caso:

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ |2+3x| > |4-x| \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} x \geq 4 \\ 2+3x > x-4 \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} x \geq 4 \\ x > -3 \end{cases} \quad \iff \quad x \geq 4$$

e come prima concludiamo che $S =]-\infty, -3[\cup]1/2, +\infty[$.

Avremmo potuto usare anche il metodo grafico (i grafici di $|2+3x|$ e $|4-x|$ sono facili e mettono in evidenza senza dubbio alcuno quali risposte scartare) o la traduzione in sistemi proseguendo da

$$|2+3x| > |4-x| \iff -|2+3x| < 4-x < |2+3x| \iff \cdots$$