Risoluzione del compito n. 3 (Giugno 2013)

PROBLEMA 1

Determinate le soluzioni (z, w), con $z, w \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} \boldsymbol{3z - \mathrm{i}|w| = \mathrm{i} + \bar{z}} \\ \boldsymbol{w - 2|z| = 4\mathrm{i}} \,. \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo

$$\begin{aligned} 3z - \bar{z} = \mathrm{i}(1 + |w|) &\iff 2z + (z - \bar{z}) = \mathrm{i}(1 + |w|) \\ &\iff 2z + 2\mathrm{i}\Im z = \mathrm{i}(1 + |w|) \iff 2z = \mathrm{i}(1 + |w| - 2\Im z) \,, \end{aligned}$$

quindi z è immaginario puro e in particolare $\bar{z} = -z$, così la prima equazione si riscrive

$$4z = \mathrm{i}(1 + |w|) \,.$$

Notiamo pure che allora $\Im z = (1 + |w|)/4 > 0$. Scrivendo $z = \mathrm{i}b$ con $b > 0$ abbiamo allora

$$4b = 1 + |w| \,, \qquad w = 2|z| + 4\mathrm{i} = 2|b| + 4\mathrm{i} = 2b + 4\mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad |w|^2 = 4b^2 + 16 \,,$$

visto che la parte reale di w è $2b$ e quella immaginaria 4. Allora da $|w| = 4b - 1$, che fra l'altro implica $b > 1/4$, ricaviamo

$$4b^2 + 16 = |w|^2 = (4b - 1)^2 = 16b^2 - 8b + 1 \iff 12b^2 - 8b - 15 = 0$$

da cui

$$b = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 180}}{12} = \frac{4 \pm 14}{12} = \begin{cases} 3/2 \\ -5/6 \,, \end{cases}$$

di cui solo la soluzione positiva è accettabile. Allora $b = 3/2$ e quindi

$$z = \frac{3}{2}\mathrm{i} \,, \qquad w = 2|z| + 4\mathrm{i} = 3 + 4\mathrm{i} \,.$$

PROBLEMA 2

Sia a_n l'integrale generalizzato $a_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx} x^2\, dx$. Dopo aver calcolato a_n per ogni naturale $n \geq 1$, dite per quali valori dell'esponente $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n)^\alpha$ risulta convergente.

Iniziamo con la sostituzione $nx = t$, da cui $n\,dx = dt$, e

$$\int \mathrm{e}^{-nx} x^2 dx = n^{-3} \int \mathrm{e}^{-nx} (nx)^2 n\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ nx=t}}{=} n^{-3} \int t^2 \mathrm{e}^{-t}\, dt\,.$$

Ora

$$\begin{aligned}\int t^2 \mathrm{e}^{-t}\, dt &= -t^2\mathrm{e}^{-t} - \int (-2t)\mathrm{e}^{-t}\, dt = -t^2\mathrm{e}^{-t} + 2\int t\mathrm{e}^{-t}\, dt \\ &= -t^2\mathrm{e}^{-t} - 2t\mathrm{e}^{-t} - 2\int (-\mathrm{e}^{-t})\, dt = -t^2\mathrm{e}^{-t} - 2t\mathrm{e}^{-t} - 2\mathrm{e}^{-t} + c\end{aligned}$$

e perciò

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx} x^2 dx &= \lim_{K\to+\infty} \int_0^K \mathrm{e}^{-nx} x^2\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ nx=t}}{=} n^{-3} \lim_{K\to+\infty} \int_0^{nK} t^2\mathrm{e}^{-t}\, dt \\ &= n^{-3} \lim_{K\to+\infty} \Big[-t^2\mathrm{e}^{-t} - 2t\mathrm{e}^{-t} - 2\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^{nK} = 2n^{-3}\,.\end{aligned}$$

Allora $a_n = 2/n^3$. In particolare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n)^\alpha = 2^\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3\alpha}}$$

converge se e solo se $3\alpha > 1$ ovvero $\alpha > 1/3$.

PROBLEMA 3

Considerate la funzione $f(x) = (1 - 6x^4)^{1/2x^2} - \mathrm{e}^{-2\,\mathrm{sen}(x^2)} + x\,\mathrm{sen}\,x$.

a) **Determinatene l'ordine di infinitesimo e la parte principale per $x \to 0$.**

b) **Calcolate $\lim\limits_{x\to 0} x^{-4} f(x)$.**

c) **Calcolate $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3f(x) - 7x^\alpha}{x^5}$ al variare di $\alpha > 0$.**

Intanto scriviamo

$$(1 - 6x^4)^{1/2x^2} = \mathrm{e}^{(1/2x^2)\log(1-6x^4)}$$

e osserviamo che

$$\log(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \Rightarrow \log(1-6x^4) = -6x^4 - 18x^8 + o(x^8)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2x^2}\log(1-6x^4) = -3x^2 - 9x^6 + o(x^6) = -3x^2 + o(x^5)$$

(abbiamo buttato via il termine proveniente da $-t^2/2$ ma non c'era altro modo di avere l' $o(x^5)$ che ci servirà poi). Allora

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{(1/2x^2)\log(1-6x^4)} &= 1 + \big(-3x^2 + o(x^5)\big) + \frac{1}{2}\big(-3x^2 + o(x^5)\big)^2 \\ &\quad + \frac{1}{6}\big(-3x^2 + o(x^5)\big)^3 + o\big(-3x^2 + o(x^5)\big)^3 \\ &= 1 - 3x^2 + \frac{9}{2}x^4 + o(x^5)\end{aligned}$$

(di nuovo abbiamo buttato un termine). Per il secondo addendo abbiamo

$$\mathrm{sen}(x^2) = x^2 + o(x^5) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{-2\,\mathrm{sen}(x^2)} = 1 - 2x^2 + 2x^4 + o(x^5)$$

e per l'ultimo

$$x\,\mathrm{sen}\,x = x^2 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^5)$$

così che

$$f(x) = 1 - 3x^2 + \frac{9}{2}x^4 + o(x^5) - \big(1 - 2x^2 + 2x^4 + o(x^5)\big) + x^2 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^5) = \frac{14}{6}x^4 + o(x^5)\ .$$

Allora l'ordine di infinitesimo è 4 e la parte principale $7x^4/3$. Questo implica che $f(x)/x^4 \to 7/3$; inoltre,

$$3f(x) - 7x^\alpha = 7x^4 - 7x^\alpha + o(x^5)\ .$$

In particolare,

$$\begin{cases} \alpha < 4 & \Rightarrow \quad 3f(x) - 7x^\alpha = -7x^\alpha + o(x^\alpha) & \text{e il limite vale } -\infty \\ \alpha = 4 & \Rightarrow \quad 3f(x) - 7x^\alpha = o(x^5) & \text{e il limite vale } 0 \\ \alpha > 4 & \Rightarrow \quad 3f(x) - 7x^\alpha = 7x^4 + o(x^4) & \text{e il limite vale } +\infty. \end{cases}$$

PROBLEMA 4

Sia $f(x) = x^4 - 14x^2 + 24x$.

a) **Determinatene i punti di massimo e minimo locale e gli intervalli di monotonia; trovatene l'estremo superiore e inferiore specificando se sono massimo o minimo; calcolate infine al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.**

b) **Motivando la risposta, trovate l'unico valore del parametro $q \in \mathbb{R}$ per il quale l'equazione $f(x) = 48x + q$ ha esattamente una soluzione.**

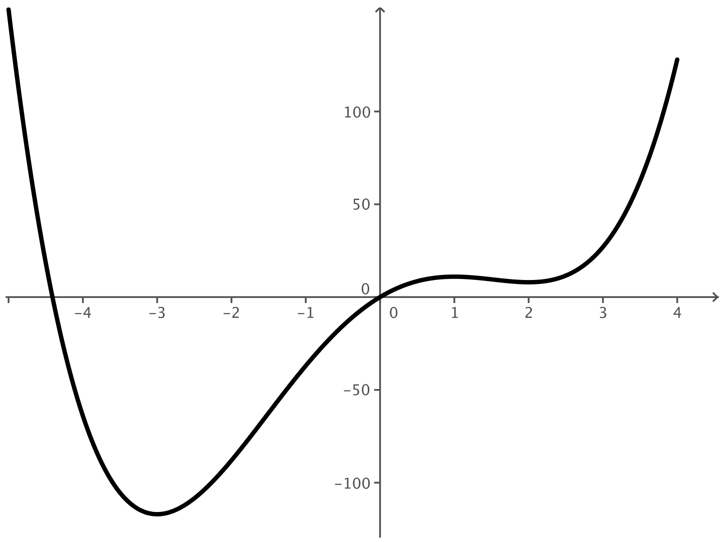
La funzione f è un polinomio, tende a $+\infty$ per $x \to \pm\infty$ e ha derivata

$$f'(x) = 4x^3 - 28x + 24 = 4(x^3 - 7x + 6) .$$

Una soluzione dell'equazione $x^3 - 7x + 6 = 0$ è $x = 1$, quindi dividendo per $x - 1$ otteniamo

$$x^3 - 7x + 6 = (x - 1)(x^2 + x - 6) = (x - 1)(x + 3)(x - 2)$$

(il grafico è in scala 40:1).



Allora gli zeri di f' sono -3 , 1 e 2 , e la derivata è positiva in $]-3, 1[$ e in $]2, +\infty$, negativa in $]-\infty, -3[$ e in $1, 2[$. Allora f decresce per $x < -3$, ha un minimo locale in $x = -3$, cresce per $-3 < x < 1$, ha un massimo locale in $x = 1$, decresce per $1 < x < 2$, ha un minimo locale in $x = 2$ e cresce per $x > 2$. Dato che $f(-3) = -117$ e $f(2) = 8$, e visti i limiti di f all'infinito, abbiamo

$$\inf f = \min f = f(-3) = -117 , \qquad \sup f = +\infty$$

(che naturalmente non è massimo). Abbiamo poi $f(1) = 11$, quindi dato che f è strettamente monotona (quindi iniettiva) in ciascuno dei quattro intervalli di monotonia otteniamo che l'equazione $f(x) = k$ ha:

nessuna soluzione	se $k < -117$
una soluzione	se $k = -117$
due soluzioni	se $-117 < k < 8$
tre soluzioni	se $k = 8$
quattro soluzioni	se $8 < k < 11$
tre soluzioni	se $k = 11$
due soluzioni	se $k > 11$.

Dobbiamo ora studiare l'equazione $f(x) = 48x + q$, ovvero $x^4 - 14x^2 - 24x = q$. Un ragionamento analogo al precedente mostra che la derivata di $g(x) = x^4 - 14x^2 - 24x$ si annulla per $x = +3$, $x = -1$ e $x = -2$, il che non dovrebbe stupire dato che $g(x) = f(-x)$. Allora il solo valore per cui l'equazione $g(x) = q$ ha esattamente una soluzione è $q = -117$.

Esercizio 1. Fra i numeri complessi di modulo 1 , quello più distante da $3+4\mathrm{i}$ è

(A) $(-3-4\mathrm{i})/5$.

(B) $(4-3\mathrm{i})/5$.

(C) $-3-4\mathrm{i}$.

(D) $(-1-\mathrm{i})/\sqrt{2}$.

È una semplice questione geometrica: il numero giusto sta sulla circonferenza unitaria, nella direzione opposta a quella in cui si trova $3+4\mathrm{i}$. Dunque è nella direzione di $-3-4\mathrm{i}$, ma dovendo avere modulo uno il numero cercato è $(-3-4\mathrm{i})/5$.

Esercizio 2. Un'edicola ha due scaffali uguali. Ogni mattina, l'edicolante espone in fila in uno a caso dei due 15 diverse riviste di sport, nell'altro 12 di turismo. Ogni giorno fa un'esposizione diversa da tutte le precedenti. Quante sono in tutto le possibili esposizioni differenti?

(A) $15!\cdot 12!\cdot 2$

(B) $27!$

(C) $\binom{27}{15}\cdot\binom{27}{12}$

(D) $\bigl(15!+12!\bigr)^2$

Le permutazioni delle riviste di sport sono $15!$; per ciascuna di queste ha a disposizione $12!$ permutazioni di quelle di turismo, e inoltre 2 permutazioni degli scaffali, quindi in totale $15!\cdot 12!\cdot 2$.

Esercizio 3. La successione $\dfrac{(n!)^{1/n}-\log n}{n^2\,\mathrm{sen}(1/n)+\arctan n}$ ha limite

(A) e^{-1} .

(B) $+\infty$.

(C) 0 .

(D) 1 .

Il denominatore è facile: $\arctan n\to\pi/2$ mentre $n^2\,\mathrm{sen}(1/n)\sim n^2/n=n\to+\infty$, quindi la somma si comporta come n :

$$n^2\,\mathrm{sen}(1/n)-\arctan n\sim n\ .$$

Per il numeratore possiamo ricordare la formula di Stirling o il limite fondamentale

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}=\mathrm{e}\ ,$$

da cui

$$(n!)^{1/n}=n\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}\sim\frac{n}{\mathrm{e}}$$

che domina sul logaritmo, pertanto

$$(n!)^{1/n}-\log n\sim\frac{n}{\mathrm{e}}$$

e il limite cercato vale $1/\mathrm{e}$.

Esercizio 4. I valori di a e b per i quali $f(x) = \begin{cases} a\,\mathrm{sen}(\pi x) + b|x^2-1| & \text{se } x<1 \\ a\cos(\pi x) + b|x^2-2| & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ è continua su $\mathbb{R}$ sono

(A) a qualsiasi, $a-b=0$.	(C) $a=1$, $b=-1$.
(B) b qualsiasi, $a+\pi b=0$.	(D) $a=-2$, $b=1$.

La funzione è continua per $x \geq 1$, e

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = a\cos\pi + b|1-2| = b-a\ ,$$

mentre f è continua per $x<1$ con

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = a\,\mathrm{sen}\,\pi = 0\ ,$$

perciò si ha continuità su $\mathbb{R}$ se $b-a=0$.

Esercizio 5. Date due funzioni f, g con derivata seconda continua tali che $f'(x_0) = g'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$ e $g''(x_0) < 0$, quale tra le seguenti affermazioni è vera?

(A) x_0 è di minimo locale per $f-g$.	(C) x_0 è di minimo locale per f/g.
(B) x_0 è di minimo locale per $f \cdot g$.	(D) x_0 è di minimo locale per $f+g$.

La funzione $f-g$ ha in x_0 derivata nulla e derivata seconda positiva, quindi ha minimo locale.

Esercizio 6. L'integrale $\displaystyle\int_0^4 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,dx$ vale

(A) $2(\mathrm{e}^2+1)$.	(C) $2\mathrm{e}^2$.
(B) e^2-1.	(D) $2\mathrm{e}^4$.

Sostituendo $\sqrt{x}=t$ ovvero $x=t^2$, da cui $dx = 2t\,dt$,

$$\int_0^4 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,dx \underset{\sqrt{x}=t}{\overset{}{=}} 2\int_0^2 t\mathrm{e}^t\,dt = 2\Big[t\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t\Big]_0^2 = 2(\mathrm{e}^2+1)\ .$$

Esercizio 7. Sia $a_n = \left|\dfrac{\alpha-3}{3}\right|^n + n^{(6\alpha-\alpha^2-6)}$, dove $\alpha>0$ è un parametro reale, e sia S l'insieme dei valori di α per i quali la serie numerica $\sum_n a_n$ converge. Allora

(A) $]5,\,6[\subseteq S$.	(C) $]0,\,+\infty[\subseteq S$.
(B) $]1,\,2[\subseteq S$.	(D) $]6,\,8[\subseteq S$.

Dato che si tratta della somma di due serie a termini positivi, converge se e solo se convergono entrambe. La prima è una serie geometrica che converge se

$$\left|\frac{\alpha-3}{3}\right|<1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -3<\alpha-3<3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0<\alpha<6\,.$$

La seconda è una serie armonica generalizzata che converge se

$$-6\alpha+\alpha^2+6>1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha^2-6\alpha+5>0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha<1 \quad \textbf{o} \quad \alpha>5\,.$$

In conclusione la serie converge nell' insieme $S =]0,1[\cup]5,6[$.