## Risoluzione del compito n. 2 (Febbraio 2013)

### PROBLEMA 1

**Determinate le soluzioni $(z, w)$, con $z, w \in \mathbb{C}$, del sistema**

$$\begin{cases} \mathrm{i}\bar{z}w = \bar{w}^2 \\ \mathrm{i}z\bar{w} = z^2 \\ |w| = 2 \, . \end{cases}$$

Prendendo il coniugato della prima equazione abbiamo

$$-\mathrm{i}z\bar{w} = w^2 \tag{1}$$

perciò dal confronto con la seconda ricaviamo

$$z^2 = -w^2 \quad \Longleftrightarrow \quad z = \pm\mathrm{i}w \, .$$

Iniziamo con il caso $z = +\mathrm{i}w$, così l'equazione (1) dà $w\bar{w} = w^2$, ma $w\bar{w} = |w|^2 = 4$ per l'ultima equazione, perciò

$$4 = w^2 \quad \Longleftrightarrow \quad w = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad z = \mathrm{i}w = \pm 2\mathrm{i} \, .$$

Analogamente nel caso $z = -\mathrm{i}w$ abbiamo

$$-w\bar{w} = w^2 \quad \Longleftrightarrow \quad w^2 = -4 \quad \Longleftrightarrow \quad w = \pm 2\mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad z = -\mathrm{i}w = \pm 2$$

e le quattro soluzioni $(z, w)$ del sistema sono

$$(2, 2\mathrm{i}) \, , \qquad (-2, -2\mathrm{i}) \, , \qquad (2\mathrm{i}, 2) \, , \qquad (-2\mathrm{i}, -2) \, .$$

**PROBLEMA 2**

**Sia data la funzione**

$$\boldsymbol{f(x) = \Big(x + \frac{1}{x}\Big)\mathrm{e}^{-(x^2+1)/x}} \ .$$

a) **Determinatene il dominio, i limiti agli estremi del dominio, il segno, gli zeri, gli asintoti e gli intervalli di monotonia, quindi tracciate un grafico approssimativo di $f$ .**

b) **Determinate al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$ .**

La funzione ha dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; inoltre l'esponenziale è sempre (qui e nel seguito, "sempre" vuol dire in ogni punto del dominio di $f$ ) positivo, mentre

$$\Big(x + \frac{1}{x}\Big) = \frac{x^2+1}{x}$$

è positivo per $x > 0$ e negativo per $x < 0$ . Dunque $f$ non si annulla mai ed è positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$ .
Abbiamo poi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = +\infty \ ,$$

quindi (qui stiamo usando il teorema sul limite della composizione: dato che $g(y) = y\mathrm{e}^{-y}$ tende a zero per $y \to +\infty$ ...)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \ .$$

Analogamente da

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{x} = -\infty \ , \qquad \lim_{y\to-\infty} g(y) = -\infty$$

segue

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \ .$$

L'asse delle ascisse è un asintoto orizzontale destro, l'asse delle ordinate è un asintoto verticale e non vi è asintoto obliquo a $-\infty$ in quanto

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x^2}\mathrm{e}^{-(x^2+1)/x} = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+1)/x} = +\infty \ .$$

La derivata di $f$ vale

$$\begin{aligned} f'(x) &= \Big(1 - \frac{1}{x^2}\Big)\mathrm{e}^{-(x^2+1)/x} + \Big(x + \frac{1}{x}\Big)\mathrm{e}^{-(x^2+1)/x}\Big(-1 + \frac{1}{x^2}\Big) \\ &= -\mathrm{e}^{-(x^2+1)/x}\Big(1 - \frac{1}{x^2}\Big)\Big(x + \frac{1}{x} - 1\Big) \\ &= -\mathrm{e}^{-(x^2+1)/x}\frac{(x^2-1)(x^2-x+1)}{x^3} \ . \end{aligned}$$

Il trinomio $x^2 - x + 1$ è sempre positivo, e così pure l'esponenziale, mentre

$$\begin{aligned} x^1 - 1 > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x < -1 \quad \text{o} \quad x > 1 \\ x^3 > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x > 0 \end{aligned}$$

per cui (ricordando il segno meno davanti a tutto)

$$f'(x) > 0 \iff x \in ]-\infty, -1[ \cup ]0, 1[ \,, \qquad f'(x) < 0 \iff x \in ]-1, 0[ \cup ]1, +\infty[ \,.$$

Allora

$$f(x) \text{ è } \begin{cases} \text{strettamente crescente in } ]-\infty, -1] \\ \text{strettamente decrescente in } [-1, 0[ \\ \text{strettamente crescente in } ]0, 1] \\ \text{strettamente decrescente in } [1, +\infty[ \,. \end{cases}$$

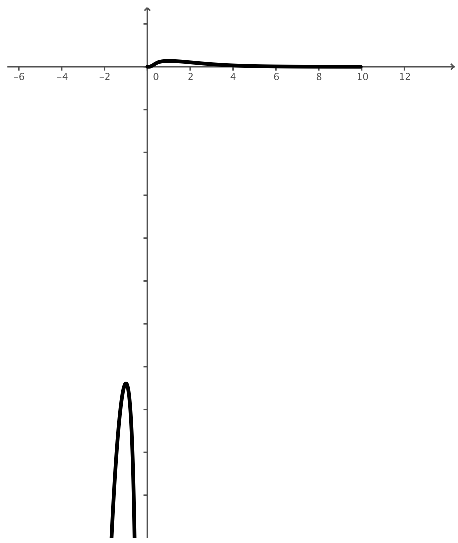
Il punto $x = -1$ è di massimo locale, e così pure $x = 1$, abbiamo

$$f(-1) = -2\mathrm{e}^2 \,, \qquad f(1) = 2\mathrm{e}^{-2} \,.$$

Osserviamo che

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \left( -\mathrm{e}^{-1/x} \cdot \frac{-1}{x^3} \right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^3 \mathrm{e}^{1/x}} = 0 \,.$$

Ora possiamo tracciare il grafico di $f$.




Dalla stretta monotonia in ciascuno degli intervalli segue l'iniettività nei medesimi, dalla continuità grazie al teorema dei valori intermedi segue che in $]-\infty, -1[$ la funzione

$f$ assume una (e quindi una sola) volta ogni valore fra $-\infty$ e $-2e^2$, e ripetendo il ragionamento negli altri intervalli otteniamo che l'equazione $f(x) = k$ ha

$$\begin{gathered}
\text{due soluzioni se } k < -2e^2 \\
\text{una soluzione se } k = -2e^2 \\
\text{nessuna soluzione se } -2e^2 < k < 2/e^2 \\
\text{una soluzione se } k = 2/e^2 \\
\text{due soluzioni se } k > 2/e^2 \,.
\end{gathered}$$

**PROBLEMA 3**

**Considerate la funzione $f(x) = \mathrm{e}^{\cos x - 1} - \mathrm{e}^{-1} \cdot (1 + x^2)^{1/x^2}$ .**

a) **Determinatene l'ordine di infinitesimo e la parte principale per $x \to 0$ .**

b) **Calcolate $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\cos x} - (1 + x^2)^{1/x^2}}{x^4}$ .**

c) **Calcolate $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{\cos x} - (1 + x^\alpha)^{1/x^\alpha}}{x^4}$ al variare di $\alpha > 0$ .**

Abbiamo

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

quindi

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\cos x - 1} &= 1 + \Big(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\Big) + \frac{1}{2}\Big(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\Big)^2 + o(\cdots)^2 \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) + \frac{x^4}{8} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4) \qquad (2) \ .
\end{aligned}$$

Invece

$$(1 + t)^{1/t} = \mathrm{e}^{t^{-1}\log(1+t)}$$

e dato che

$$\frac{1}{t}\log(1 + t) = \frac{1}{t}\Big(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)\Big) = 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + o(t^2)$$

ricaviamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-1}(1 + t)^{1/t} &= \mathrm{e}^{-(t/2)+(t^2/3)+o(t^2)} \\
&= 1 + \Big(-\frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + o(t^2)\Big) + \frac{1}{2}\Big(-\frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + o(t^2)\Big)^2 + o(\cdots)^2 \\
&= 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + o(t^2) + \frac{t^2}{8} \\
&= 1 - \frac{t}{2} + \frac{11t^2}{24} + o(t^2) \ . \qquad (3)
\end{aligned}$$

Allora

$$\mathrm{e}^{-1} \cdot (1 + x^2)^{1/x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{11x^4}{24} + o(x^4)$$

e infine

$$\mathrm{e}^{\cos x - 1} - \mathrm{e}^{-1} \cdot (1 + x^2)^{1/x^2} = \frac{x^4}{6} + o(x^4) - \frac{11x^4}{24} = -\frac{7x^4}{24} + o(x^4) \ .$$

Allora $f$ ha ordine di infinitesimo $4$ e parte principale $-7x^4/24$ .

Da quanto visto sopra,

$$\mathrm{e}^{\cos x} - (1+x^2)^{1/x^2} = \mathrm{e}\Big(\mathrm{e}^{\cos x - 1} - \mathrm{e}^{-1}\cdot(1+x^2)^{1/x^2}\Big) = -\frac{7\mathrm{e}x^4}{24} + o(x^4)$$

quindi il primo limite vale $-7\mathrm{e}/24$.
L'ultimo limite è già stato trattato nel caso $\alpha = 2$, e ora ci occupiamo degli altri casi.
Dalla (3) ricaviamo

$$(1+x^\alpha)^{1/x^\alpha} = \mathrm{e}\Big(1 - \frac{x^\alpha}{2} + o(x^\alpha)\Big)$$

mentre dalla (2) otteniamo

$$\mathrm{e}^{\cos x} = \mathrm{e}\Big(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\Big)\ ,$$

perciò

$$\mathrm{e}^{\cos x} - (1+x^\alpha)^{1/x^\alpha} = \frac{\mathrm{e}x^\alpha}{2} - \frac{\mathrm{e}x^2}{2} + o(x^\alpha) + o(x^2)\ . \tag{4}$$

Se $0 < \alpha < 2$ il termine $x^\alpha$ domina sull'altro, quindi

$$\mathrm{e}^{\cos x} - (1+x^\alpha)^{1/x^\alpha} = \frac{\mathrm{e}x^\alpha}{2} + o(x^\alpha) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{e}^{\cos x} - (1+x^\alpha)^{1/x^\alpha}}{x^4} = \frac{\frac{\mathrm{e}}{2} + \frac{o(x^\alpha)}{x^\alpha}}{x^{4-\alpha}} \to +\infty\ .$$

Invece se $\alpha > 2$ il termine che domina in (4) è $x^2$ e perciò

$$\frac{\mathrm{e}^{\cos x} - (1+x^\alpha)^{1/x^\alpha}}{x^4} = \frac{-\frac{\mathrm{e}}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}}{x^2} \to -\infty\ .$$

In conclusione il limite vale

$$+\infty \quad \text{se } 0 < \alpha < 2\ , \qquad -7\mathrm{e}/24 \quad \text{se } \alpha = 2\ , \qquad -\infty \quad \text{se } \alpha > 2\ .$$

**PROBLEMA 4**

**Sia $f(x) = \mathrm{e}^{x^\alpha} - 1 - x$ , dove $\alpha > 0$ .**
**a) Determinatene l'ordine di infinitesimo e la parte principale per $x \to 0^+$ .**

**b) Posto $a_n = f(1/n)$ , determinate per quali $\alpha > 0$ converge $\sum a_n$ .**

Dato che $\alpha > 0$ abbiamo $x^\alpha \to 0$ per $x \to 0$ , quindi

$$\mathrm{e}^{x^\alpha} = 1 + x^\alpha + \frac{1}{2}x^{2\alpha} + o(x^{2\alpha}) = 1 + x^\alpha + o(x^\alpha)$$

(useremo lo sviluppo lungo o corto a seconda della necessità). Allora

$$f(x) = 1 + x^\alpha + o(x^\alpha) - 1 - x = x^\alpha - x + o(x^\alpha) \, .$$

Se $0 < \alpha < 1$ abbiamo $-x = o(x^\alpha)$ , quindi $f(x) = x^\alpha + o(x^\alpha)$ ed $f$ è un infinitesimo di ordine $\alpha$ con parte principale $x^\alpha$ . Se invece $\alpha > 1$ ricaviamo $f(x) = -x + o(x)$ ed $f$ è infinitesima di ordine $1$ con parte principale $-x$ . Nel caso $\alpha = 1$ , lo sviluppo corto che abbiamo impiegato dà $f(x) = o(x)$ , che è inutilizzabile. Ricorriamo allo sviluppo più lungo che (adattato al caso $\alpha = 1$ ) dà $f(x) = x^2/2 + o(x^2)$ ed $f$ è infinitesima di ordine $2$ con parte principale $x^2/2$ .
Se $0 < \alpha < 1$ abbiamo

$$a_n \sim \frac{1}{n^\alpha}$$

quindi si tratta di una serie a termini positivi e possiamo applicare il criterio del confronto asintotico che dà

$$\sum_n a_n \sim \sum_n \frac{1}{n^\alpha}$$

che diverge positivamente dato che $\alpha < 1$ . Analogamente, nel caso $\alpha > 1$ la serie è a termini negativi e

$$\sum_n a_n \sim \sum_n \Big(-\frac{1}{n}\Big)$$

che diverge negativamente. Infine se $\alpha = 1$ abbiamo $a_n \sim 1/n^2$ , di nuovo la serie è a termini positivi e stavolta converge dato che

$$\sum_n a_n \sim \sum_n \frac{1}{n^2} \, .$$

**Esercizio 1.** Moltiplicando $3087 - 4012\mathrm{i}$ per $401 + 399\mathrm{i}$ si ottiene un numero

| | |
|---|---|
| (A) che ha modulo circa tre milioni. | (C) che ha modulo circa centomila. |
| (B) che ha parte reale negativa. | (D) immaginario puro. |

I valori assoluti delle parti reale e immaginaria del primo fattore valgono circa $3 \cdot 1000$ e $4{\cdot}1000$, quindi per il teorema di Pitagora il suo modulo vale ciorca $5{\cdot}1000$. Analogamente il secondo fattore ha parti reale e immaginaria circa $400$, quindi ha modulo circa $400\sqrt{2}$. Il prodotto ha dunque modulo circa

$$5 \cdot 1000 \cdot 400 \cdot \sqrt{2} = 2.000.000 \cdot \sqrt{2} \simeq 2.000.000 \cdot 1.4 = 2.800.000\,.$$

Possiamo controllare facilmente che le altre due risposte sono errate: infatti il primo fattore ha argomento fra $-\pi/4$ e $-\pi/3$, e il secondo circa $\pi/4$, pertanto il prodotto ha argomento poco meno di zero, dunque ha parte reale positiva.

**Esercizio 2.** Un insegnante interroga il ragazzo più alto della classe di 25 alunni. Qual è la probabilità che sia il primo in ordine alfabetico?

| | |
|---|---|
| (A) $1/25$ | (C) $1/24!$ |
| (B) $1/25!$ | (D) $24/25!$ |

I ragazzi in ordine alfabetico sono come numerati, da 1 a 25. L'insegnante ne ha scelto uno a caso (il criterio usato non importa, fintanto che non coinvolge l'ordine alfabetico), quindi i casi possibili sono 25 e quello favorevole uno solo.

**Esercizio 3.** Il limite $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{1-\cos(\pi x)}{x^2-4x+4}$ vale

| | |
|---|---|
| (A) $\pi^2/2$. | (C) $0$. |
| (B) $1/2$. | (D) $+\infty$. |

Conviene porre $y = x - 2$, così

$$\lim_{x\to 2} \frac{1-\cos(\pi x)}{(x-2)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos(\pi y + 2\pi)}{y^2} = \pi^2 \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos(\pi y)}{(\pi y)^2} = \pi^2 \cdot \frac{1}{2}\,.$$

**Esercizio 4.** Sia $S$ l'insieme delle soluzioni della disequazione $9^x + 2 \geq 3 \cdot 3^x$. Allora

| | |
|---|---|
| (A) $]1, +\infty[ \subset S$. | (C) $\exists\, x < 0 \,:\, x \notin S$. |
| (B) $S = [\log 2/\log 3, +\infty[$. | (D) $1/2 \in S$. |

Poniamo $3^x = t$, così $9^x = t^2$ e la disequazione da studiare diventa

$$t^2 + 2 \geq 3t \quad \iff \quad t^2 - 3t + 2 \geq 0 \quad \iff \quad (t-1)(t-2) \geq 0\,.$$

Dato che $t = 3^x$ , di questa disequazione ci interessano solo le soluzioni $t > 0$ , che sono $0 < t \leq 1$ oppure $t \geq 2$ . Tornando a $x = \log_3 t$ otteniamo

$$S = ]-\infty, 0] \cup [\log_3 2, +\infty[ \, .$$

Notiamo che

$$3^{1/2} = \sqrt{3} < 2 < 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} < \log_3 2 < 1 \, ,$$

quindi $S \supset ]1, +\infty[$ e le altre risposte sono errate.

---

**Esercizio 5.** Una primitiva di $f(x) = \log \sqrt{x}$ è

| | |
|---|---|
| (A) $x \log \sqrt{x} - \frac{1}{2}x + 2$ . | (C) $\frac{2}{3} \log x^{3/2} + 7$ . |
| (B) $\sqrt{x} \log \sqrt{x} - \sqrt{x} - 1$ . | (D) $1 + 1/2x$ . |

Dato che $\log \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log x$ e che una primitiva di $\log x$ è $x \log x - x$ , le primitive di $\log \sqrt{x}$ sono

$$\frac{1}{2}(x \log x - x) + c = x \log \sqrt{x} - \frac{1}{2}x + c \, .$$

---

**Esercizio 6.** Se $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{se } x = \pi \\ 5 + \operatorname{sen} x & \text{se } x \neq \pi \end{cases}$ allora

| | |
|---|---|
| (A) $f'(\pi) = -1$ . | (C) $f$ non è derivabile in $x = \pi$ . |
| (B) $f'(\pi) = 0$ . | (D) $f$ non è continua in $x = \pi$ . |

Dato che $5 + \operatorname{sen} x = 5$ per $x = \pi$ , la funzione $f$ non è altro che la funzione $5 + \operatorname{sen} x$ , su tutto $\mathbb{R}$ . Allora $f'(\pi) = \cos \pi = -1$ .

---

**Esercizio 7.** I valori di $\beta \in \mathbb{R}$ per i quali risulta convergente la serie $\sum \bigl(n^{4\beta - \beta^2 - 1} + n^{\beta - 6}\bigr)$ sono

| | |
|---|---|
| (A) $]-\infty, 0[ \cup ]4, 5[$ . | (C) $]-\infty, 2[ \cup ]3, +\infty[$ . |
| (B) $]-\infty, 5[$ . | (D) $]-\infty, 0[$ . |

Si tratta della somma di due serie a termini positivi, quindi converge se e solo se convergono entrambe le serie

$$\sum n^{4\beta - \beta^2 - 1} \qquad \sum n^{\beta - 6} \, ,$$

che riscriviamo

$$\sum \frac{1}{n^{\beta^2 - 4\beta + 1}} \qquad \sum \frac{1}{n^{6 - \beta}} \, .$$

La prima converge per $\beta^2 - 4\beta + 1 > 1$ , cioè $\beta^2 - 4\beta > 0$ ossia $\beta < 0$ oppure $\beta > 4$ . La seconda converge per $6 - \beta > 1$ , ovvero $\beta < 5$ . In conclusione la serie di partenza converge per $\beta < 0$ e per $4 < \beta < 5$ .

---