Analisi Matematica 1

Correzione prova scritta del 3 luglio 2013

1ª Parte

(1) La successione a termini positivi $\{a_n\}_n$ sia tale che $\sum_n a_n$ converge. Quale tra le seguenti affermazioni è **vera**.

(A) $\{a_n\}_n$ è monotona.

(B) $\sum_n \sqrt[3]{a_n}$ converge.

(C) $\{a_n\}_n$ è di Cauchy..

(D) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \in [0, 1[$.

Se $\sum_n a_n$ converge, allora $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ allora $\{a_n\}_n$ è di Cauchy, e quindi la risposta corretta è la (C)

(2) In un sacchetto sono contenute 9 palline nere e 6 palline bianche. Pescandone 4 di seguito, qual è la probabilità che 3, e unicamente 3, di queste siano nere?

(A) $\dfrac{32}{65}$.

(B) $\dfrac{4\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}$.

(C) $\dfrac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{15!}$.

(D) $\dfrac{6}{55}$.

$$P = \frac{9}{15}\cdot\frac{8}{14}\cdot\frac{7}{13}\cdot\frac{6}{12} + \frac{9}{15}\cdot\frac{8}{14}\cdot\frac{6}{13}\cdot\frac{7}{12} +$$

$$+ \frac{9}{15}\cdot\frac{6}{14}\cdot\frac{8}{13}\cdot\frac{7}{12} + \frac{6}{15}\cdot\frac{9}{14}\cdot\frac{8}{13}\cdot\frac{7}{12}$$

e dunque la risposta corretta è (B)

(3) Sia $f(x) = \left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^3$. Quale tra le seguenti risposte è **vera**?

(A) f ha massimo su $\mathbb{R}$.

(B) f ha minimo su $]0, +\infty[$.

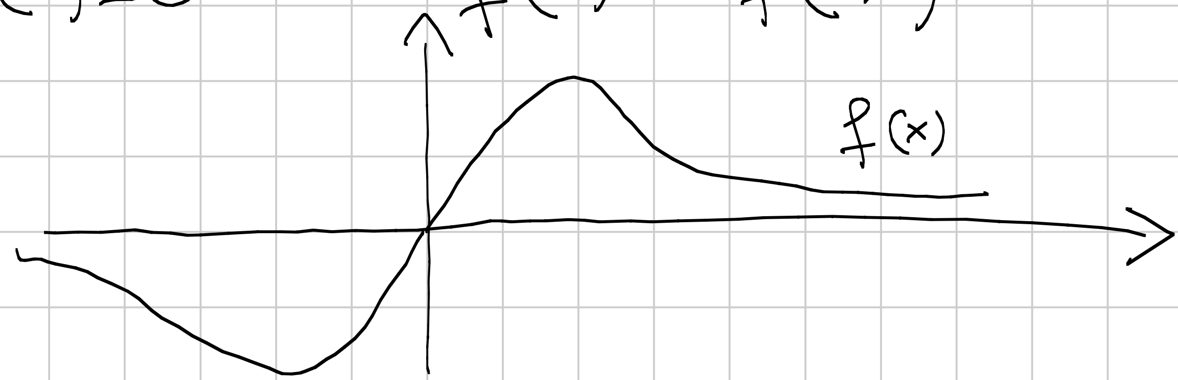
(C) $f \to -\infty$ quando $x \to -\infty$.

(D) f è decrescente su $]-\infty, 0[$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0^{\pm}$, dunque (C) è falsa

$$f'(x) = 3\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2 \cdot \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \begin{cases} >0 & |x|<1 \\ <0 & |x|>1 \end{cases}$$

$f(0)=0$ $\quad f(x) = -f(-x)$



Quindi la risposta corretta è la (A).

Si osservi che la (B) e la (D) sono false.

(4) Data una funzione f derivabile nel punto x_0, quale tra le seguenti affermazioni è **vera**?

(A) $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = 0$.

(B) $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0-h)-f(x_0-3h)}{2h} = -f'(x_0)$.

(C) $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0-h)-f(x_0-2h)}{h} = 3f'(x_0)$.

(D) $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+4h)-f(x_0+2h)}{h} = 2f'(x_0)$.

Utilizzando il Teorema dell'Hôpital si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+4h)-f(x_0+2h)}{h} \overset{(H)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{4f'(x_0)-2f'(x_0)}{1}$$

$$= 2f'(x_0)$$

e quindi la risposta corretta è la (D)

Oppure

$$\frac{f(x_0+4h)-f(x_0+2h)+f(x_0)-f(x_0)}{h} =$$

$$4\,\frac{f(x_0+4h)-f(x_0)}{4h} - 2\,\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{2h}$$

$$\xrightarrow[h\to 0]{} 4f'(x_0) - 2f'(x_0) = 2f'(x_0)$$

(5) Sia E l'insieme degli $\alpha > 0$ per cui l'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(x^5+1)\log(1+x^2)}\,dx$ risulta convergente. Quale tra le seguenti affermazioni è **vera**?

(A) $]0,+\infty[\subseteq E$.

(B) Nessuna delle altre risposte è vera.

(C) $]1,2[\subseteq E$.

(D) $5 \in E$.

$f(x) = \frac{x^\alpha}{(x^5+1)\log(1+x^2)}$; $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge

$\underline{\text{sse}}$ convergono ① $\int_0^2 f(x)dx$ e ② $\int_2^{+\infty} f(x)dx$

$x \to 0 \quad f(x) \sim \frac{x^\alpha}{\log(1+x^2)} \sim \frac{1}{x^{2-\alpha}}$ Per il criterio del

confronto asintotico $\int_0^2 f\,dx$ converge $\underline{\text{sse}}$

$\int_0^2 \frac{dx}{x^{2-\alpha}}$ converge $\underline{\text{sse}}$ $2-\alpha < 1$ $\underline{\text{sse}}$ $\boxed{1 < \alpha}$

$x \to +\infty \quad f \sim \frac{x^\alpha}{x^5 \log x^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^{5-\alpha}\log x}$

e per il criterio confronto asintotico

$\int_2^{+\infty} f\,dx$ converge $\underline{\text{sse}}$ $\frac{1}{2}\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{5-\alpha}\log x}$ converge

$\underline{\text{sse}}$ $5-\alpha > 1$ $\underline{\text{sse}}$ $\boxed{4 > \alpha}$

La risposta corretta è la (C)

(6) Sia S l'insieme delle soluzioni della disequazione $\sqrt{x^2-16} \leq 1+|x-3|$. Quale tra le seguenti affermazioni è **vera**?

(A) $[-4,-3[\subset S$.

(B) Nessuna delle altre risposte è vera.

(C) $]4,5[\subset S$.

(D) $]-\infty,4]\subset S$.

$$\begin{cases} x>3 \\ |x|\geq 4 \\ (x-2)^2 \geq x^2-16 \end{cases} \quad \begin{cases} 4\leq x \\ -4x+4\geq -16 \end{cases} \quad \begin{cases} 4\leq x \\ 5\,\cancel{20}\geq \cancel{4}x \end{cases}$$

$$\boxed{4\leq x<5}$$

$$\begin{cases} x\leq 3 \\ |x|\geq 4 \\ (4-x)^2\geq x^2-16 \end{cases} \quad \begin{cases} x\leq -4 \\ 16-8x\geq -16 \end{cases} \quad \begin{cases} x\leq -4 \\ \overset{4}{\cancel{32}}\geq \overset{1}{\cancel{8}}x \end{cases}$$

$$\boxed{x\leq -4}$$

La risposta corretta è la (C)

(7) Sia $z = (1-\mathrm{i})^{11}$. Quale tra le seguenti risposte è **vera**?

(A) $z = 32\sqrt{2}(1-\mathrm{i})$.

(B) $z = 32(-1+\mathrm{i})$.

(C) Nessuna delle altre risposte è vera.

(D) $z = 2^{11}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

$$z = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7}{4}\pi\right)\right]^{11} =$$

$$= 2^{11/2}\left(\cos\frac{77}{4}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{77}{4}\pi\right) =$$

$$= 32\sqrt{2}\left(\cos\left(18\pi + \frac{5}{4}\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(18\pi + \frac{5}{4}\pi\right)\right)$$

$$= 32\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5}{4}\pi\right)$$

$$= 32\left(-1 - i\right)$$

La risposta corretta è la (C)

2^e Parte

1) Determinate le soluzioni (z, w), con $z, w \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} 2\bar{w} - z = iw \\ |z|^2 w = -iz \, . \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 0 \\ 2\bar{\omega} = i\omega \end{cases} \qquad \omega = c + id \qquad \begin{cases} z = 0 \\ 2c + id = ic - d \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 0 \\ c = -\frac{d}{2} \\ d = -\frac{d}{2} \end{cases}$$ Ne segue che $(0,0)$ è soluzione

Se $z \neq$ allora anche $\omega \neq 0$

$$\begin{cases} 2\bar{\omega} - z = i\omega \\ \bar{z}\omega = -i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{''} \\ z\bar{\omega} = i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\bar{\omega} - \frac{i}{\bar{\omega}} = i\omega \\ z = i/\bar{\omega} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\bar{\omega}^2 - i = i|\omega|^2 \qquad \omega = c + id$$

$$2(c^2 - d^2 - 2icd) - i = i(c^2 + d^2)$$

$$\begin{cases} (c-d)(c+d) = 0 \\ -4cd - 1 - c^2 - d^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (c-d)(c+d) = 0 \\ c^2 + d^2 + 4cd = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = d \\ 6c^2 = -1 \end{cases}$$ IMPOSSIBILE

$$\begin{cases} c = -d \\ -2c^2 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} d = \mp \frac{\sqrt{2}}{2} \\ c = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ z_1 = i/\overline{\omega_1} = i\omega_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ z_2 = i\omega_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

2) Sia

$$f(x) = \frac{\log^4(x) + 1}{x\log(x)\left(\log^2(x) + 1\right)}.$$

a) Determinate tutte le primitive della funzione $f(x)$.

b) Calcolate $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} f(x)\,dx$.

$$\int f(x)\,dx \underset{\substack{t = \log x \\ dt = \frac{dx}{x}}}{=} \left(\int \frac{t^4+1}{t(t^2+1)}\,dt \right)_{t = \log x}$$

$$\begin{array}{r|l} t^4 \qquad\qquad +1 & t^3+t \\ \hline t^4 + t^2 & t \\ \hline -t^2+1 & \end{array}$$

$$\frac{t^2-1}{t(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+1} = \frac{At^2+A+Bt^2+Ct}{t(t^2+1)}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ C=0 \\ A=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \\ C=0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \int f\,dx = \left(\int t\,dt + \int \frac{dt}{t} - \int \frac{2t}{t^2+1}\,dt \right)_{t=\log x}$$

$$= \frac{1}{2}\log^2 x + \log|\log x| - \log(\log^2 x + 1) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\int_e^{e^2} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}\log^2 x + \log(\log x) - \log(\log^2 x + 1) \right]_{x=e}^{x=e^2}$$

$$= 2 + \log 2 - \log 5 - \frac{1}{2} + \log 2$$

$$= \frac{3}{2} + \log\frac{4}{5}$$

3) Sia $f(x) = (1+x^2)^{1/x} - e^x + x - x\cos(x)$.

a) Determinate l'ordine di infinitesimo e la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$.

b) Calcolate $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) + \alpha x^{2\alpha+3}}{x^5}$, al variare di $\alpha > 0$.

$$(1+x^2)^{1/x} = e^{\frac{1}{x}\log(1+x^2)} = e^{\frac{1}{x}\left(x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^5)\right)} =$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{11}{24}x^4 + \frac{11}{120}x^5 + o(x^5)$$

$$-e^x + x - x\cos x = -\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}\right) + x +$$

$$- x\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + o(x^5)$$

$$= -1 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{20} + o(x^5)$$

$$f(x) = -\frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{24} + o(x^5)$$

Quindi $f(x)$, quando $x \to 0^+$, è un infinitesimo di ordine 4 e p.p. $-\frac{x^4}{2}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) + \alpha x^{2\alpha+3}}{x^5} = \begin{cases} +\infty & 0 < \alpha < \frac{1}{2} \\ 1/24 & \alpha = 1/2 \\ -\infty & \frac{1}{2} < \alpha \end{cases}$$

4) Sia data la funzione

$$f(x) = (4-x)e^{-2/x^2}\ .$$

Determinatene il dominio massimale, i limiti agli estremi del dominio, il segno, gli zeri, gli asintoti, gli intervalli di monotonia e gli estremi locali. Tracciate un grafico approssimativo di f. Determinate, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

f è definita $\forall x \neq 0$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(4-x)\cdot\lim_{x\to-\infty} e^{-2/x^2} = +\infty\cdot 1 = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 4\cdot\lim_{x\to 0} e^{-2/x^2} = 4\cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(4-x)\lim_{x\to+\infty} e^{-2/x^2} = -\infty\cdot 1 = -\infty$$

$$f'(x) = -e^{-2/x^2} + (4-x)e^{-2/x^2}\cdot\left(-2\cdot(-2)x^{-3}\right)$$

$$= e^{-2/x^2}\left(-1 + (4-x)\frac{4}{x^3}\right) =$$

$$= \frac{e^{-2/x^2}}{x^3}\left(-x^3-4x+16\right) =$$

$$= -\frac{e^{-2/x^2}}{x^3}\left(x^3+4x-16\right)$$

$$= -\frac{e^{-2/x^2}}{x^3}(x-2)(x^2+2x+8)$$

Dunque $f'(2)=0$ $\lim_{x\to 0^+} f' = 0^+$ $\lim_{x\to 0^-} f' = 0^-$

Per quanto riguarda il segno

$f(x)>0$ se $\begin{matrix} 4-x>0 \\ x\neq 0 \end{matrix}$ se $x\in]-\infty,0[\cup]0,4[$

Per gli asintoti si osserva che

- $\nexists$ asintoti verticali
- $\nexists$ " orizzontali
- $y=-x+4$ è asintoto obliquo per $x\to\pm\infty$

infatti

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{4-x}{x}e^{-2/x^2} = -1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)+x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\frac{4-x}{x}e^{-2/x^2}+1\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\frac{4-x}{x}\left(1+o(1)\right)+1\right) = 4$$

Ne segue che si può definire

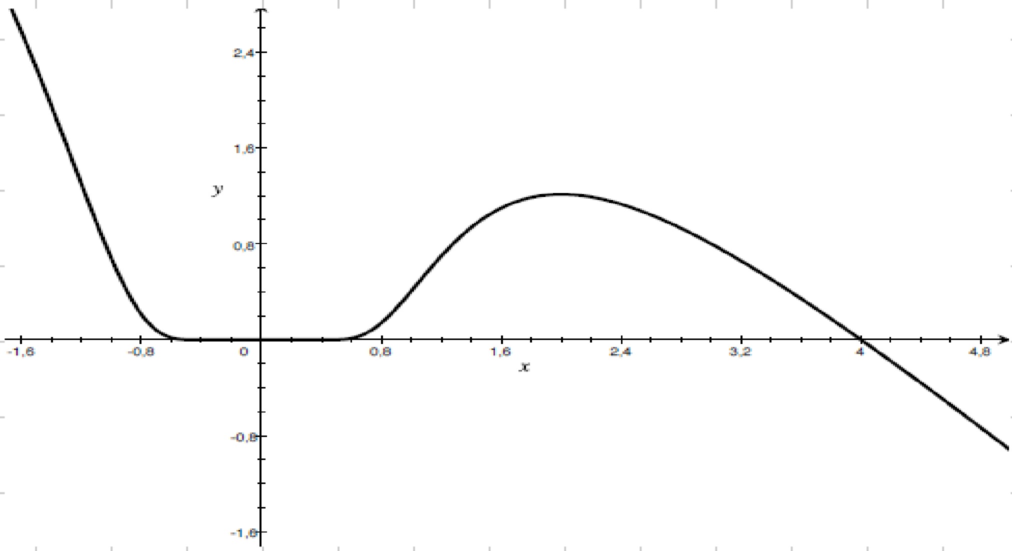
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{e si ha } \tilde{f}'(0) = 0$$

Dunque $x=0$ è min locale per f

$x=2$ " max locale per f

$$f(x) \begin{cases} >0 & x<4, \; x\neq 0 \\ <0 & x>4 \end{cases}$$

$$f'(x) \begin{cases} <0 & x<0 \\ >0 & 0<x<2 \\ <0 & 2<x \end{cases}$$



Questo è il grafico della funzione

$$f(2) = (4-2)\,e^{-2/4} = \frac{2}{\sqrt{e}}$$

Per quanto riguarda l'equazione $f(x)=k$

$k \leq 0$	$f(x)=k$	ha 1 soluzione
$0<k<\frac{2}{\sqrt{e}}$	"	ha 3 soluzioni
$k=\frac{2}{\sqrt{e}}$	"	" 2 soluzioni
$k>\frac{2}{\sqrt{e}}$	"	" 1 soluzione