Soluzioni della prima parte dello scritto di Analisi 1 del 6 luglio 2012

(1) Sia data la funzione $f(x) = x^2 - x - e^{1+x}$. L'equazione della retta tangente al grafico di f^{-1} nel punto $(1, f^{-1}(1))$ è

(A) $y = -(3+x)/4$.	(C) $y = 2x+3$.
(B) $y = -(x+1)/2$.	(D) $y = -4x+2$.

$f(x) = x^2 - x - e^{1+x} = 1$ se $x = -1 = f^{-1}(1)$

$f'(x) = 2x - 1 - e^{1+x}$ $\quad f'(-1) = -4 \Rightarrow (f^{-1})'(1) = -\frac{1}{4}$

L'equazione è perciò $\quad y - f^{-1}(1) = (f^{-1})'(1)\,(x-1)$

$$y = -1 - \frac{1}{4}(x-1) = -\frac{x}{4} - \frac{5}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}(x+3)$$

ovvero la risposta (A)

(2) Sia $w = \dfrac{z^2 - 2\overline{z} + \mathrm{i}z}{(1+\mathrm{i})\overline{z}^2 - z - 1}$. Se $z = 2 + \mathrm{i}$, quale tra le seguenti risposte è **vera**?

(A) $\Re w = -6/5$.	(C) $\Im w = -7/5\mathrm{i}$.
(B) $\Re w = -1/5$.	(D) Nessuna delle altre risposte è vera.

$$\frac{(4-1+4i) - 2(2-i) + i(2+i)}{(1+i)(4-1-4i) - 2 - i - 1}$$

$$\frac{3+4i-4+2i+2i-1}{\cancel{3}+3i-4i+4-\cancel{3}-i} = \frac{-2+8i}{4-2i}$$

$$= -\frac{(1-4i)(2+i)}{5} = -\frac{1}{5}\left[2+i-8i+4\right]$$

$$= -\frac{6}{5} + \frac{7}{5}i$$

La risposta corretta è la (A)

(3) Il limite $\lim_{x\to\pi/3} \dfrac{\sqrt{3}-2\cos(x/2)}{\pi-3x}$ vale

(A) nessuna delle altre risposte è vera.

(B) $-1/6$.

(C) 1 .

(D) $2/3$.

Il limite è una forma indeterminata

$$\sqrt{3}-2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=0$$

$$\pi-3\cdot\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}-2\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\pi-3x} \underset{\text{Hopital}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{-2\left(-\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cdot\frac{1}{2}}{-3}$$

$$=-\frac{1}{3}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{6}$$

La risposta corretta è la (B)

(4) In una scatola sono contenute 6 palline, 1 pallina contiene la lettera P, 3 palline contengono la lettera A e 2 palline contengono la lettera T. Quale è la probabilità che, estraendo tutte le palline di seguito, le lettere vengano a formare la parola **PATATA**?

(A) $\left[\binom{6}{3}\binom{6}{2}\right]^{-1}$.

(B) $\dfrac{1}{3!+2!+1!}$.

(C) $1/12$.

(D) $1/60$.

Si devono calcolare permutazioni di 6 oggetti distinte (se scambio tra loro due lettere uguali, la parola non cambia!)

dunque $\dfrac{6!}{1!\,3!\,2!}=\dfrac{4\cdot5\cdot6}{2}=60$

La risposta corretta è la (D)

(5) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, e si supponga che $]-\delta, \delta[\cap A \neq \emptyset$ per ogni $\delta > 0$. Quale tra le seguenti risposte è **vera**?

(A) 0 è punto di accumulazione per A.
(B) L'insieme $]-1, 1[\cap A$ ha infiniti elementi.
(C) Nessuna delle altre risposte è vera.
(D) $0 \in A$.

$x=0$ è di accumulazione per A se

$\forall \delta > 0 \quad]-\delta, \delta[\cap (A \setminus \{0\}) \neq \emptyset$

(A) è falsa (vedi la definizione)

(B) è falsa : si prenda per esempio $A = \{0\}$

(D) è falsa : " " " " $A =]0,1[$

(C) è vera !

(6) Sia S l'insieme di tutte le soluzioni della disequazione $\ln(x^2 + 5x - 6) > \ln(3x^2 - 3x - 6)$. Quale tra le seguenti risposte è **vera**?

(A) Nessuna delle altre risposte è vera.
(B) $S =]2, 4[$.
(C) $S =]1, 2[$.
(D) $]-\infty, -6[\subset S$.

$x^2+5x-6 > 0$ <u>se</u> $(x+6)(x-1) > 0$
<u>se</u> $x \in]-\infty, -6[\cup]1, +\infty[$

$3x^2-3x-6 > 0$ <u>se</u> $(x-2)(x+1) > 0$
<u>se</u> $x \in]-\infty, -1[\cup] 2, +\infty[$

$-2x^2 + 8x > 0$ <u>se</u> $x(4-x) > 0$
<u>se</u> $x \in]0, 4[$

La risposta corretta è la (B)

(7) Sia $\alpha > 0$ un numero reale. L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + \sqrt{x}}$

(A) converge se $0 < \alpha < 1/2$.
(B) non converge mai.
(C) converge qualunque sia $\alpha > 0$.
(D) converge se $\alpha > 1$.

$f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha + \sqrt{x}}$ è continua su $]0, +\infty[$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + \sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha + \sqrt{x}} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + \sqrt{x}}$$

Quando $x \to 0^+$ $\dfrac{1}{x^\alpha + \sqrt{x}} \sim \dfrac{1}{x^\beta}$ $\beta = \min\{\alpha, \frac{1}{2}\}$

quindi $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ converge <u>se</u> $\min\{\alpha, \frac{1}{2}\} < 1$

e quest'ultima disuguaglianza è sempre verificata, cioè

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha + \sqrt{x}} < +\infty \quad \forall \alpha > 0 \; !$$

Quando $x \to +\infty$, $f(x) \sim \dfrac{1}{x^\gamma}$ $\gamma = \max\{\alpha, \frac{1}{2}\}$

quindi $\displaystyle\int^{+\infty} f(x)dx$ converge <u>se</u>

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\gamma}$ converge <u>se</u> $\gamma > 1$

<u>se</u> $\alpha > 1$

$\left(\frac{1}{2} < 1 \; !!\right)$

Quindi la risposta corretta è la (D)

Soluzione della seconda parte dello scritto di Analisi 1 del 6 luglio 2012

1) Determinate le soluzioni $(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ del sistema

$$\begin{cases} z^2 - \overline{w} = 2\mathrm{i} \\ w - (3\mathrm{i}+1)\bar{z} = 2 \,. \end{cases}$$

$$w = 2 + (1+3i)\overline{z}$$

$$\begin{cases} \overline{w} = 2 + (1-3i)z \\ z^2 - 2 - (1-3i)z = 2i \end{cases}$$

$$z^2 - (1-3i)z - 2(1+i) = 0$$

$$z = \frac{1-3i + \sqrt{1-9-6i+8+8i}}{2} = \frac{1-3i+\sqrt{2i}}{2}$$

$$2i = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) \qquad \sqrt{2i} = \{1+i\,;\,-1-i\}$$

$$\begin{cases} z_1 = -2i \\ z_2 = 1-i \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 = -2i \\ w_1 = 2 + (1+3i)\cdot 2i \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = -2i \\ w_1 = -4+2i \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_2 = 1-i \\ w_2 = 2 + (1+3i)(1+i) \end{cases} \qquad \begin{cases} z_2 = 1-i \\ w_2 = 2+1+i+3i-3 \end{cases} \qquad \begin{cases} z_2 = 1-i \\ w_2 = 4i \end{cases}$$

2) Sia data la funzione $f(x) = x^3 + 2|1 - x^2| - 4x$, dove $x \in [-3, 2]$. Tracciate un grafico approssimativo evidenziando le regioni di monotonia, massimi e minimi e convessità/concavità.
Determinate, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$. Calcolate

$$\int_{-2}^{2} f(x)\, dx.$$

Determinate per quali valori di $x \in]-3, 2[$ si ha

$$\int_{0}^{x} f(t)\, dt > 0.$$

$$|1-x^2| = \begin{cases} 1-x^2, & \text{se } |x| \le 1 \\ x^2-1, & \text{se } |x| > 1 \end{cases} \Rightarrow f = \begin{cases} x^3-2x^2-4x+2, & |x| \le 1 \\ x^3+2x^2-4x-2, & |x|>1 \end{cases}$$

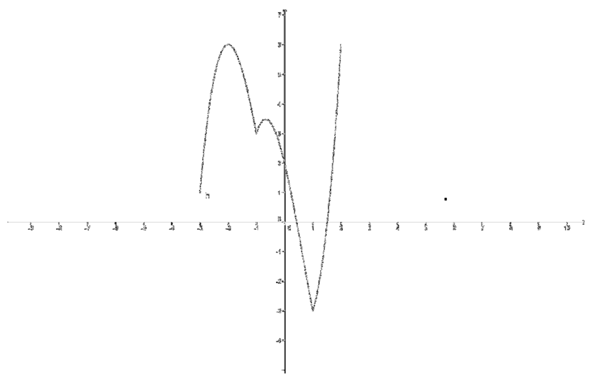
$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2-4x-4, & |x| \le 1 \\ 3x^2+4x-4 & |x|>1 \end{cases} \qquad x_{1,2} = \frac{+2 \pm \sqrt{4+12}}{3} \begin{array}{l} 2 \\ -\frac{2}{3} \end{array}$$

$$x_{3,4} = \frac{-2 \pm 4}{3} \begin{array}{l} -2 \\ 2/3 \end{array}$$

e quindi $f' = 0$ se $x_1 = -2$ $x_2 = -2/3$

$f' > 0$ se $x \in [-3, -2[\cup]-1, -\frac{2}{3}[\cup]1, 2]$

$$f''(x) = \begin{cases} 6x-4 & |x| \le 1 \\ 6x+4 & |x|>1 \end{cases} \qquad f''>0 \text{ se } x \in \left]\tfrac{2}{3}, +\infty\right[$$



$\min f([-3,2]) = f(1) = -3$

$\max f([-3,2]) = f(-2) = 6$

$x = -2$ p.to max relativo interno

$x = -1$ p.to min relativo interno (di non differenziabilità)

$x = -\frac{2}{3}$ punto di max relativo interno

$$f\left(-\tfrac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27} + 2 \cdot \frac{5}{9} + \frac{8}{3} = \frac{94}{27}$$

$x = 1$ punto di min assoluto interno $f(1) = -3$

$$\left.\begin{array}{l} k < -3 \\ k > 6 \end{array}\right\} \quad \phi \text{ soluzioni}$$

$k = -3$ 1 soluzioni

$-3 < k < 1$ 2 soluzioni

$1 \leq k < 3$ 3 soluzioni

$k = 3$ 4 soluzioni

$3 < k < \frac{94}{27}$ 5 soluzioni

$k = \frac{94}{27}$ 4 soluzioni

$\frac{94}{27} < k < 6$ 3 soluzioni

$$\int_{-2}^{2}\left(x^3+2|1-x^2|-4x\right)dx = \left[\frac{x^4}{4}-2\left(x-\frac{x^3}{3}\right)-2x^2\right]_{-2}^{-1} + \left[\cdots\right]_{1}^{2}$$

$$+\left[\frac{x^4}{4}+2\left(x-\frac{x^3}{3}\right)-2x^2\right]_{-1}^{1}$$

$$=\left[\frac{1}{4}-2\left(-\cancel{1}+\frac{1}{3}\right)-\cancel{2}-\cancel{4}+2\left(-\cancel{2}+\frac{8}{3}\right)+\cancel{8}\right]$$

$$+\left[\cancel{4}-2\left(\cancel{2}-\frac{8}{3}\right)-8-\cancel{\frac{1}{4}}+2\left(1-\frac{1}{3}\right)+2\right]$$

$$+\left[2\left(1-\frac{1}{3}\right)-2\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right]=8$$

L'insieme degli x t.c.

$$+\left[\frac{x^4}{4}+2\left(x-\frac{x^3}{3}\right)-2x^2\right]_{-1}^{1}$$

$\int_0^x f(t)\,dt \geq 0$

risulta essere $[0,\alpha]$, dove $0{,}5 < \alpha < 1$

e la radice reale positiva di massimo modulo di

$$p(x) = \frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3-2x^2+2x = 0$$

3) Sia $f(x) = \dfrac{\cos(2x)}{1+x} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{1-x} - \dfrac{e^{-x^2}}{1-x^2}$.

a) Determinate ordine e parte principale dell'infinitesimo $f(x)$ quando $x \to 0$.

b) Calcolate, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{(1-\cos x)^\alpha}$.

a) ordine 3 $\qquad$ p.p. $= \dfrac{11}{6} x^3$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{(1-\cos x)^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{11}{6} \frac{x^3}{\frac{x^{2\alpha}}{2^\alpha}}$$

$$= 2^\alpha \cdot \frac{11}{6} \lim_{x\to 0} x^{3-2\alpha} = \begin{cases} 0 & \frac{3}{2} > \alpha \\ \sqrt{2}\cdot\frac{11}{3} & \frac{3}{2} = \alpha \\ +\infty & \alpha < \frac{3}{2} \end{cases}$$

Per il calcolo dell'ordine si osserva che

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}\left((1-x)\cos(2x) + (1+x)\operatorname{sen} x - e^{-x^2}\right)$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^5) = 1 + o(x)$$

$$(1-x)\cos(2x) = (1-x)\left(1-2x^2+o(x^3)\right) = 1-x-2x^2+2x^3+o(x^3)$$

$$(1+x)\sin x = (1+x)\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right) = x+x^2-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

$$-e^{-x^2} = -1+x^2+o(x^2)$$

$$f(x) = (1+o(x))\left(\frac{11}{6}x^3+o(x^3)\right) = \frac{11}{6}x^3+o(x^3)$$

4) Sia $f(t) = \arctan(t) + \dfrac{t}{1+t^2}$.

a) Calcolate, al variare di $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

b) Studiate al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie $\sum_n a_n$, dove $a_n = F(n^\alpha)$.

$$\int f(t)\,dt = \int\left(\operatorname{arctg}(t) + \frac{t}{1+t^2}\right)dt = \int \operatorname{arctg}(t)\,dt + \int \frac{t}{1+t^2}\,dt$$

$$= t\operatorname{arctg}(t) - \int\frac{t}{1+t^2}\,dt + \int\frac{t}{1+t^2}\,dt = t\operatorname{arctg}(t) + c$$

$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = x \operatorname{arctg} x$

$F(n^\alpha) = n^\alpha \operatorname{arctg}(n^\alpha)$

$\alpha > 0 \quad a_n \sim \frac{\pi}{2} \cdot n^\alpha$, quindi $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

e quindi $\sum_n a_n$ diverge a $+\infty$

$\alpha = 0 \quad a_n = \operatorname{arctg} 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \operatorname{arctg} 1 \neq 0$

e quindi $\sum_n a_n$ diverge a $+\infty$

$\alpha < 0 \quad a_n = n^\alpha \operatorname{arctg}(n^\alpha) \underset{n\to\infty}{\sim} n^{2\alpha}$

e dunque $\sum_n a_n$ converge

<u>sse</u> $\sum_n n^{2\alpha}$ converge

<u>sse</u> $-2\alpha > 1$ <u>sse</u> $\alpha < -\frac{1}{2}$