Correzione esame Analisi 1 del 17 febbraio 2012

Titolo nota 14/02/2012

Esercizio 1. Il sistema $\begin{cases} z = 3i - w \\ w = i + \bar{z} \end{cases}$

(A) è impossibile.
(B) ha una sola soluzione (z, w).
(C) ha infinite soluzioni, tutte con $\Im z = 1$.
(D) ha solo soluzioni reali.

$$\begin{cases} z = 3i - (i + \bar{z}) \\ w = i + \bar{z} \end{cases} \quad \begin{cases} z + \bar{z} = 2i \\ w = i + \bar{z} \end{cases} \quad \begin{cases} 2\operatorname{Re} z = 2i \\ w = i + \bar{z} \end{cases}$$

IMPOSSIBILE ! ($\operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$ ma $i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$)

Esercizio 2. Una scatola di costruzioni contiene tre cubi rossi, tre verdi e due blu, tutti dello stesso lato. Un bimbo costruisce una torre mettendoli tutti in verticale, uno sopra l'altro. Quante torri diverse può costruire?

(A) $\binom{8}{3} \cdot \binom{5}{3}$.
(B) $\frac{8!}{18}$.
(C) $(3!)^2 \cdot 2!$.
(D) $8!$.

Le possibili torri sono $8!$ (se fossero tutti $\neq$)

ma 3 sono rossi, 3 verdi e 2 blu dunque

il numero cercato è $\dfrac{8!}{3!\,3!\,2!} = \binom{8}{3}\binom{5}{3}$

Esercizio 3. La successione $\dfrac{2\frac{\operatorname{sen} n}{n} - 3n^2 \operatorname{sen} \frac{1}{n^2}}{5\frac{\cos n}{n} - 6 \cos \frac{1}{n^3}}$

(A) ha limite $1/2$.
(B) ha limite $2/5$.
(C) ha limite $-3/5$.
(D) ha limite $-1/3$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\frac{\operatorname{sen} n}{n} - 3n^2 \operatorname{sen} 1/n^2}{5\frac{\cos n}{n} - 6\cos 1/n^2} = \frac{1}{2}$$

infatti $2\dfrac{\operatorname{sen} n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$; $5\dfrac{\cos n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$-3n^2 \operatorname{sen} 1/n^2 = -3\frac{\operatorname{sen} 1/n^2}{1/n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} -3$$

$$-6\cos 1/n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} -6$$

Esercizio 4. Sia $A \subset \mathbb{R}^+$ l'insieme degli $\alpha > 0$ per cui converge l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x^\alpha) + x^\alpha\sqrt{x}}{x^3+x^4}\, dx \,.$$

Allora

(A) $A = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid 2 < \alpha < 5/2\}$.

(B) A è l'insieme vuoto.

(C) $A = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid 3/2 < \alpha < 5/2\}$.

(D) $A = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid 2 < \alpha < 3\}$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x^\alpha)+x^\alpha\sqrt{x}}{x^3+x^4}\,dx < \infty \quad \underline{\text{sse}}$$

$$\underline{\text{sse}} \quad \begin{cases} \int_0^1 \frac{x^\alpha}{x^3}\,dx < \infty \\ \int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha\sqrt{x}}{x^4}\,dx < \infty \end{cases} \quad \underline{\text{sse}} \quad \begin{cases} 3-\alpha < 1 \\ 4-\alpha-\frac{1}{2} > 1 \end{cases}$$

$$\underline{\text{sse}} \quad 2 < \alpha < 5/2$$

Esercizio 5. Se $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$, allora

(A) $f \geq 0$ in un intorno del punto $x = 1$.

(B) f è concava su $[-2, 1]$.

(C) f è decrescente in $[-1, 2]$.

(D) f è limitata superiormente.

$f(x) = 2x^3+3x^2-12x+7$ $\qquad f(1)=0$

$f'(x) = 6x^2+6x-12$ $\qquad f'(1)=0 \implies x_0=1$ è punto min. locale

$f''(x) = 12x+6$ $\qquad f''(1)=18>0$

$\implies \exists\,]1-\delta, 1+\delta[$ t.c. $f(x) \geq f(1)=0$ $\forall x \in]1-\delta,1+\delta[$

Esercizio 6. Se S è l'insieme delle soluzioni della disequazione $\sqrt{x^2+x} < \sqrt{3-x}$, allora

(A) $]-3,-1] \subset S$

(B) $]3,+\infty[\subset S$.

(C) S ha minimo.

(D) $-1/2 \in S$.

$$x \in S \quad \underline{\text{sse}} \quad \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x^2+x \geq 0 \\ x^2+x < 3-x \end{cases} \quad \underline{\text{sse}} \quad \begin{cases} x \leq 3 \\ x \leq -1 \text{ o } 0 \leq x \\ x^2+2x-3 < 0 \end{cases}$$

$$\underline{\text{sse}} \quad \begin{cases} x \in]-\infty, 3] \\ x \in]-\infty,-1] \cup [0,+\infty[\\ (x+3)(x-1) < 0 \end{cases} \quad \underline{\text{sse}} \quad x \in]-3,-1] \cup [0,1[$$

Esercizio 7. Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\pi x) + a \log x + b e^x & \text{se } x \geq 1 \\ a x^2 + b x & \text{se } x < 1 \end{cases}$ allora

(A) f non è mai derivabile in $x = 1$.

(B) f è continua su tutto $\mathbb{R}$ per ogni a, b.

(C) f è derivabile in $x = 1$ se $a = -\pi$ e $b = \dfrac{\pi}{1 - e}$.

(D) $f(x) \to -\infty$ per $x \to +\infty$ se $a \cdot b < 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} \pi \cos(\pi x) + a/x + b e^x & \text{se } x > 1 \\ 2ax + b & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(1^-) = a + b = b \cdot e = f(1^+) \\ f'(1^-) = 2a + b = -\pi + a + b \cdot e = f'(1^+) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = b \cdot e \\ 2a + b = -\pi + a + a + b \end{cases} \qquad \begin{cases} a + b = b \cdot e \\ 0 = -\pi \end{cases} \qquad \underline{\text{IMP}}$$

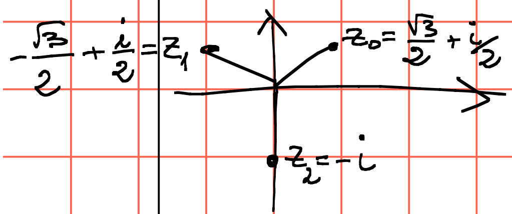
dunque f non è derivabile in $x_0 = 1$

1) Determinate le soluzioni $(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ del sistema

$$\begin{cases} zw^2 = 4iz^2 \\ -2wz^2 = w^2 \\ \Re z \le 0\,. \end{cases}$$

Una soluzione è $\boxed{(0,0)}$. Tolta questa ci si riduce a

$$\begin{cases} w^2 = 4iz \\ w = -2z^2 \\ \operatorname{Re} z \le 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cancel{4}z^4 = \cancel{4}iz \\ w = -2z^2 \\ \operatorname{Re} z \le 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z^3 = i \\ w = -2z^2 \\ \operatorname{Re} z \le 0 \end{cases}$$



z_0 non è accettabile

$$\begin{cases} z = -i \\ w = 2 \end{cases} \longrightarrow \boxed{(-i, 2)}$$

$$\boxed{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},\ -1 + i\sqrt{3}\right)} \longleftarrow \begin{cases} z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \\ w = -2\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$$

2) Trovate il campo di esistenza, i limiti agli estremi del campo di esistenza, gli intervalli di monotonia, il segno della funzione $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x} + \dfrac{1-x}{x}$.
Con queste informazioni, disegnate un grafico approssimativo della funzione f.
Determinate poi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni x dell'equazione $f(x) = k$.

$$f(x) = e^{-1/x} - 1 + 1/x = g(-1/x) \quad \text{dove} \quad g(t) = e^t - 1 - t$$

$f(x) \to 0^+$ quando $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = \left(e^{-1/x} - 1\right)\left(+\frac{1}{x^2}\right) \begin{cases} > 0 & x < 0 \\ < 0 & x > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = k \begin{cases} \emptyset \text{ soluz} & k \le 0 \\ 2 \text{ soluzioni} & k > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = e^{1/x} - 1 - 1/x \qquad f' = \left(e^{1/x} - 1\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) \begin{cases} < 0 & x > 0 \\ > 0 & x < 0 \end{cases}$$

3) Calcolate il seguente limite: $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{-x^2} - x \operatorname{sen} x - \cos(2x)}{\dfrac{x^2}{1-x^2} - x \operatorname{sen} x}$.

(Solo Analisi 1) Calcolate poi, al variare di $\alpha > 0$, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x^2} - x^\alpha \operatorname{sen} x - \cos(2x)}{\dfrac{x^2}{1-x^2} - x \operatorname{sen} x} .$$

Risposta:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + o(x^7)$$

$$-x \operatorname{sen} x = -x^2 + \frac{x^4}{6} - \frac{x^6}{5!} + o(x^7)$$

$$-\cos 2x = -1 + 2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{8}{15}x^6 + o(x^7)$$

$$-x(1-x^2)\operatorname{sen} x = (x^3 - x)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)$$

$$= -x^2 + \frac{x^4}{6} + x^4 + o(x^5) = -x^2 + \frac{7}{6}x^4 + o(x^5)$$

dunque $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - x \operatorname{sen} x - \cos 2x}{\frac{x^2}{1-x^2} - x \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} (1-x^2) \cdot \frac{o(x^4)}{\frac{7}{6}x^4 + o(x^5)}$

$$= 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - x^\alpha \operatorname{sen} x - \cos 2x}{\frac{7}{6}x^4 + o(x^5)} (1-x^2)$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{-x^{1+\alpha} + o(x^{1+\alpha})}{\frac{7}{6}x^4 + o(x^5)} (1-x^2) = -\infty & \alpha < 1 \\ 0 & \alpha = 1 \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 + o(x^2)}{\frac{7}{6}x^4 + o(x^5)} (1-x^2) = +\infty & \alpha > 1 \end{cases}$$

4) Calcolate il limite $\lim_{n\to+\infty} n^3 \int_{1/n}^{1/n^2} t \operatorname{sen} t \, dt$.

(Solo Analisi 1) Calcolate al variare di $\alpha > 0$ il limite $\lim_{n\to+\infty} n^3 \int_{1/n}^{1/n^\alpha} t \operatorname{sen} t \, dt$.

$$\int t \operatorname{sen} t \, dt = -t\cos t + \int \cos t \, dt = -t\cos t + \operatorname{sen} t + c \quad c \in \mathbb{R}$$

$$n^3 \int_{1/n}^{1/n^2} t \operatorname{sen} t = n^3 \left[-\frac{1}{n^2}\cos\frac{1}{n^2} + \operatorname{sen}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\cos\frac{1}{n} - \operatorname{sen}\frac{1}{n} \right]$$

$$= n^3 \left[-\frac{1}{n^2}\left(\cancel{1} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \cancel{\frac{1}{n^2}} + \frac{1}{n}\left(\cancel{1} - \frac{1}{2n^2}\right) - \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{6n^3} \right]$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

$$= n^3 \left[-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right] \longrightarrow -\frac{1}{3}$$

$$n^3 \int_{1/n}^{1/n^\alpha} t \operatorname{sen} t \, dt$$

$= n^3 \left[+\frac{1}{3} \frac{1}{n^{3\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right) \right] \longrightarrow +\infty$ se $\alpha < 1$

$\to 0$ se $\alpha = 1$

$\to -\frac{1}{3}$ se $\alpha > 1$

Oppure si osserva che

$t \operatorname{sen} t \sim t^2$ per $t \to 0$, dunque

$$\int_{1/n}^{1/n^\alpha} t \operatorname{sen} t \, dt \sim \left[\frac{t^3}{3} \right]_{1/n}^{1/n^\alpha} = \frac{1}{3n^{3\alpha}} - \frac{1}{3n^3}$$

etc