Correzione Scritto Analisi 1 del 17 gennaio 2012

Titolo nota 03/02/2012

Esercizio 1. Sia data l'equazione complessa $(*)$ $9z^2 - 6(2i+1)z + 4i = 3$. Quale tra le seguenti risposte è **vera**?

(A) Nessuna delle altre risposte è vera.
(B) (*) non ha soluzioni.
(C) (*) ha due soluzioni distinte.
(D) (*) ha almeno una soluzione reale.

L'equazione ha come discriminante

$$\Delta = 9(2i+1)^2 - 9(4i-3)$$
$$= 9\left[-4+1+4i-4i+3\right] = \phi$$

ovvero ha 2 soluzioni coincidenti!

Esercizio 2. In quanti modi, con 15 palline diverse, si possono formare tre mucchietti, uno da 5, uno da 7 e uno da 3 palline ?

(A) $\binom{15}{5} \cdot \binom{10}{7}$.
(B) $\binom{15}{5} \cdot \binom{15}{7} \cdot \binom{15}{3}$.
(C) $\binom{15}{5} + \binom{15}{7} + \binom{15}{3}$.
(D) $\dfrac{15 \cdot 14 \cdot 13}{5 \cdot 7 \cdot 3}$.

Osserviamo che, una volta fatto 1 mucchietto da 5
1 " " 7
quello che resta è un mucchietto da 3:

$$\text{Modi} = \binom{15}{5} \cdot \binom{10}{7}$$

Esercizio 3. Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali. Quale tra le seguenti affermazioni è **falsa**?

(A) Se $\{a_n\}$ ha limite, allora è limitata.
(B) Se $\{a_n\}$ è infinitesima, allora ha limite.
(C) Se $\{a_n\}$ è crescente, allora ha minimo.
(D) Se $\{a_n\}$ ha limite, allora anche $\{|a_n|\}$ ha limite.

(B) è vera: se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ con $\ell = 0$

(C) è vera: essendo $a_n \le a_{n+1}$ $\forall n$, si ha che

$$a_1 = \min\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

(D) è vera: se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ allora $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = |\ell|$

(A) È FALSA: preso $a_n = n$, $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$
ma $\{a_n\}_n$ NON è LIMITATA

Esercizio 4. Sia $A \subset \mathbb{R}^+$ l'insieme degli $\alpha > 0$ per cui converge l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \arctan(x^{2\alpha})}{3x^2 + 2x^3}\, dx\,.$$

Allora

(A) $A = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid 1/3 < \alpha < 2\}$.

(B) $A = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid 1/3 < \alpha < 2/3\}$.

(C) $A = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid 1/3 < \alpha < 1\}$;

(D) nessuna delle altre risposte è vera.

$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{+\infty} f(x)dx$ dove $f(x) = \frac{x^\alpha \arctg(x^{2\alpha})}{3x^2+2x^3}$

Studiamo $\int_0^1 f dx$: $f(x)$ è continua su $]0,1]$, e

quando $x \to 0$ $f(x) \sim \frac{x^{3\alpha}}{3x^2}$ (in quanto $\arctg(x^{2\alpha}) \sim x^{2\alpha}$ e $2x^3 = o(3x^2)$)

e quindi $\int_0^1 f(x)dx$ converge

se $\int_0^1 \frac{1}{3x^{2-3\alpha}} dx$ converge se $2-3\alpha < 1$

se $\frac{1}{3} < \alpha$

Studiamo $\int_1^{+\infty} f(x)dx$: f è continua su

$[1,+\infty[$, e quando $x \to +\infty$ $f(x) \sim \frac{x^\alpha \cdot \pi/2}{2x^3}$

dunque $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge se $\int_1^{+\infty} \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{x^{3-\alpha}} dx$ converge

se $3-\alpha > 1$ se $2 > \alpha$

Quindi $\int_0^{+\infty} f dx$ converge se $\frac{1}{3} < \alpha < 2$

Esercizio 5. Se $f(x)$ ha derivata uguale a $x \arctan x$ e $f(1) = -1/2$, allora

(A) $f(x) = \frac{x^2+1}{2}\arctan x - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$.

(B) $f(x) = x^2 \arctan x - \frac{x}{2}\log(x^2+1) + c$.

(C) $f(x) = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$.

(D) $f(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{\pi}{4} - 1$.

(A) è la risposta corretta

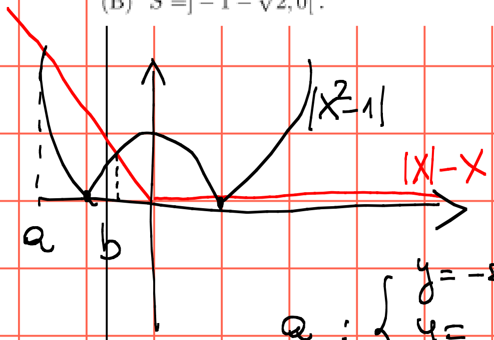
$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right] = x\operatorname{arctg} x + \frac{\cancel{x^2+1}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{1+x^2}} - \frac{1}{2}$$

$$= x\operatorname{arctg} x$$

$$\left[\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right]_{x=1} = \frac{1^2+1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}$$

Esercizio 6. Se S è l'insieme delle soluzioni della disequazione $|x^2-1|+x<|x|$, allora

(A) S è limitato superiormente.
(B) $S =]-1-\sqrt{2}, 0[$.
(C) S è vuoto.
(D) $-1 \notin S$.



Dunque si tratta di studiare $|x^2-1| < |x|-x$

$$a : \begin{cases} y=-2x \\ y=x^2-1 \\ x<0 \end{cases} \qquad x^2-1+2x=0$$

$$x_{1,2} = -1\pm\sqrt{1+1}$$

$$\boxed{a=-1-\sqrt{2}}$$

$$b : \begin{cases} y=-2x \\ y=1-x^2 \\ x<0 \end{cases} \qquad x^2-2x-1=0$$

$$\boxed{b=1-\sqrt{2}}$$

$$S = \{x : -1-\sqrt{2} < x < 1-\sqrt{2}\} =]-1-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}[$$

ovvero la risposta corretta è la (A)

Esercizio 7. Se f ha in $x=0$ un punto di massimo locale, un suo sviluppo di Taylor può essere

(A) $f(x) = 3-x^4+o(x^4)$.
(B) $f(x) = x+x^2+o(x^2)$.
(C) $f(x) = 2+x^2+o(x^3)$.
(D) $f(x) = -2x^3+o(x^3)$.

Se f è derivabile 4 volte ed ha un massimo locale in $x=0$, allora necessariamente dovrà soddisfare

1) $f'(0)=0$ e $f''(0)\leq 0$

oppure

2) $f'(0)=0$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=0$, $f^{(IV)}(0)\leq 0$

dunque (B), (C) e (D) non si possono essere sviluppi accettabili, mentre (A) è accettabile

1) Determinare le soluzioni $(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ del sistema

$$\begin{cases} z^2 = iw \\ w^2 = 8iz \\ \Re z > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} z^4 = -w^2 \\ w^2 = 8iz \\ \operatorname{Re} z > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z^2 = iw \\ -z^4 = 8iz \\ \operatorname{Re} z > 0 \end{cases}$$

$$z^3 = -8i = 8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = 2i$$

$$z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

di cui la sola z_2 soddisfa $\operatorname{Re} z_2 = 1 > 0$

e dunque $\boxed{z = 1 - i\sqrt{3}}$

mentre
$$\begin{aligned} w &= -i z^2 \\ &= -i\,(1-i\sqrt{3})^2 \\ &= -i\,(1-3-2i\sqrt{3}) \\ &= 2i - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

e dunque $(z, w) = (1-i\sqrt{3}, -2\sqrt{3}+2i)$

2) Studiare il grafico della funzione $f(x) = -\frac{3}{2}\ln(x^2+2x+1) + \frac{5}{2}\ln(x^2-2x+1) + \frac{4}{(x-1)}$, determinando in particolare campo di esistenza, limiti agli estremi del campo di esistenza, regioni di monotonia, massimi e minimi relativi.
Tracciare poi un grafico approssimativo della funzione f.
Determinare il numero di soluzioni reali positive dell'equazione $f(x) = k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = -3\ln|x+1| + 5\ln|x-1| + \frac{4}{x-1}$$

$$C.E.(f) \equiv \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-1} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{1}{x-1}\left[-3(x-1)\ln|x+1| + 5(x-1)\ln|x-1| + 4\right]$$

$$= \lim_{x\to1^-} \frac{1}{x-1}\left[4 + o(1)\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$$

$$\frac{d}{dx}\left[-3\ln|x+1| + 5\ln|x-1| + \frac{4}{x-1}\right] =$$

$$= -3\,\frac{x+1}{|x+1|}\cdot\frac{1}{|x+1|} + 5\,\frac{x-1}{|x-1|}\cdot\frac{1}{|x-1|} - \frac{4}{(x-1)^2}$$

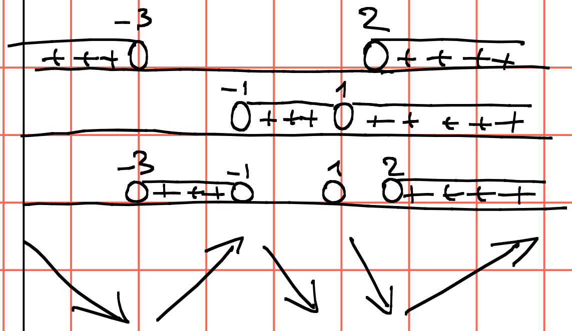
$$= -\frac{3}{x+1} + \frac{5}{x-1} - \frac{4}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{-3(x^2-2x+1) + 5(x^2-1) - 4(x+1)}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$= \frac{-3x^2+6x-3+5x^2-5-4x-4}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$= \frac{2x^2+2x-12}{(x-1)^2(x+1)} \qquad \begin{array}{c} x^2+x-6 \\ (x+3)(x-2) \end{array}$$

$$f'(x) = \frac{2(x+3)(x-2)}{(x-1)^2(x+1)} = 0 \quad \text{sse} \quad \begin{array}{c} x=-3 \\ o \\ x=2 \end{array}$$



$f(2) = -3\ln 3 + 4$

$f(-3) = -3\ln 2 + 5\ln 4 - 1 = 7\ln 2 - 1$

$f($

$f(2) \overset{!}{=} -\ln 27 + 4 = \ln \frac{e^4}{27}$

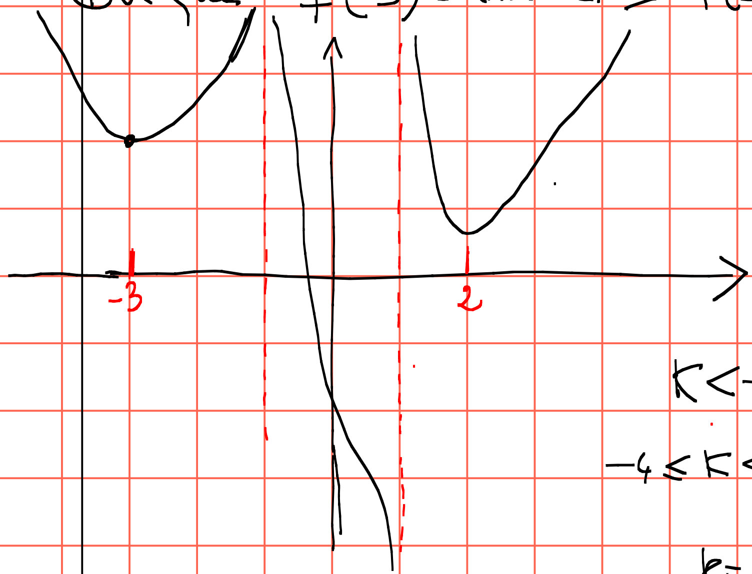
$f(-3) = \ln 128 - 1 = \ln \frac{128}{e}$

$\frac{128}{e} > \frac{e^4}{27}$

$128 \cdot 27 > e^5$

Infatti $2^7 \cdot 3^2 > 3^5 > e^5$

Dunque $f(-3) =$ min loc. $> f(2) =$ max locale



Contiamo le soluzioni positive

$K < -4$ 1 sol positive

$-4 \leq K < f(2)$ ϕ sol positive

$k = f(2)$ 1 sol positive

$k > f(2)$ 2 sol. positive

3) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{(\operatorname{sen} x)^2}{1+x^2} - x^2 + \frac{x^4}{3}}{\ln(1+x^2) - x \operatorname{sen} x}.$$

(**Solo Analisi 1**) Calcolare poi, al variare dell'esponente $\alpha > 0$, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{(\operatorname{sen} x)^2}{1+x^2} - x^2 + \frac{x^4}{3} + x^\alpha}{\ln(1+x^2) - x \operatorname{sen} x}.$$

$$\frac{1}{1+x^2} \quad \frac{(\operatorname{sen} x)^2 - x^2 - x^4 + \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{3}}{\ln(1+x^2) - x \operatorname{sen} x}$$

$$\frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{\left[x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right]^2 - x^2 - \frac{2}{3}x^4}{x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) - x\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)}$$

$$\frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{\cancel{x^2} - \frac{x^4}{3} + o(x^4) - \cancel{x^2} - \frac{2}{3}x^4}{-\frac{x^4}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)}$$

$$\frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{-x^4 + o(x^4)}{-\frac{x^4}{3} + o(x^4)} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1/3$$

$$\frac{1}{1+x^2} \quad \frac{(\operatorname{sen} x)^2 - x^2 - x^4 + \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{3} + x^\alpha + x^{\alpha+2}}{\ln(1+x^2) - x \operatorname{sen} x}$$

$$\alpha < 4 \quad \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{x^\alpha + o(x^\alpha)}{-\frac{x^4}{3} + o(x^4)} \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$$

$$\alpha = 4 \quad \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{o(x^4)}{-\frac{x^4}{3} + o(x^4)} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$$

$$\alpha > 4 \quad \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{-x^4 + o(x^4)}{-\frac{x^4}{3} + o(x^4)} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1/3$$

4) Fissato $\alpha > 0$, sia $a_n = \int_{n^\alpha}^{n} \frac{dx}{x^3}$. **Motivando il procedimento**, studiate il carattere della serie $\sum_n a_n$ al variare di $\alpha > 0$.

$$\int \frac{dx}{x^3} = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$= -\frac{1}{2x^2} + c$$

$$a_n = \int_{n^\alpha}^{n} \frac{dx}{x^3} = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{x=n^\alpha}^{x=n} = -\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^{2\alpha}}$$

(•) Ora se $\alpha > 1$ allora $a_n \sim -\frac{1}{2n^2}$ per $n \to \infty$

per il teorema del confronto asintotico

$\sum_n a_n$ ha lo stesso carattere di $\sum_n \frac{1}{2n^2}$

che è convergente

(••) Se $\alpha = 1$ allora $a_n = 0$ allora $\sum_n a_n$ converge

(⁝) Se $\alpha < 1$ allora $a_n \sim \frac{1}{2n^{2\alpha}}$ quando $n \to +\infty$

e per il Teorema del confronto asintotico

$\sum_n a_n$ ha lo stesso carattere di $\sum_n \frac{1}{2n^{2\alpha}}$

e quest'ultima converge <u>sse</u> $2\alpha > 1$

<u>sse</u> $\alpha > 1/2$

Riassumendo

$\sum_n a_n$ converge <u>sse</u> $\alpha > 1/2$