Correzione Esame AN 1 10 gennaio 2012

Titolo nota 12/01/2012

(1) In una confezione di 10 cioccolatini ve ne sono 7 ripieni; scegliendo 4 cioccolatini, quale è la probabilità che tutti siano ripieni?

(A) 1/6 .
(B) 1/420 .
(C) 1/210 .
(D) 1/3 .

Primo modo

Casi favorevoli $= \binom{7}{4}$

Casi possibili $= \binom{10}{4}$

$$P = \frac{\binom{7}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{7!}{3!\,\cancel{4!}} \cdot \frac{6!\,\cancel{4!}}{10!}$$

$$= \frac{\cancel{4}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{6}}{\cancel{8}\cdot\cancel{9}\cdot\cancel{10}} = \frac{1}{6}$$

Secondo Modo

$$P = \frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7} = \frac{1}{6}$$

(2) Sia A il campo di esistenza della funzione $f(x) = \ln\left(3 - \sqrt{x^2 - 4x + 4}\right)$. Quale tra le seguenti affermazioni è vera?

(A) $A =]-1, 5[$.
(B) $A =]-5, -1[$.
(C) $A =]-5, 1[$.
(D) Nessuna delle altre risposte è vera.

① $\begin{cases} x^2 - 4x + 4 \geq 0 \\ 3 - \sqrt{(x-2)^2} > 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} (x-2)^2 \geq 0 \leftarrow \text{sempre risolta} \\ 3 > \sqrt{(x-2)^2} = |x-2| \end{cases}$

$$\Leftrightarrow -3 < x-2 < 3 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x > -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \,]-1, 5[$$

(3) Data la serie $\sum_n a_n$, dove $a_n = \left| \frac{3\alpha - 2}{4 - \alpha} \right|^n$, sia $A = \{\alpha \mid \sum_n a_n \text{ converge}\}$. Quale tra le seguenti affermazioni è vera?

(A) Nessuna delle altre risposte è vera.

(B) $A \subset]-1, 2[$.

(C) A è illimitato.

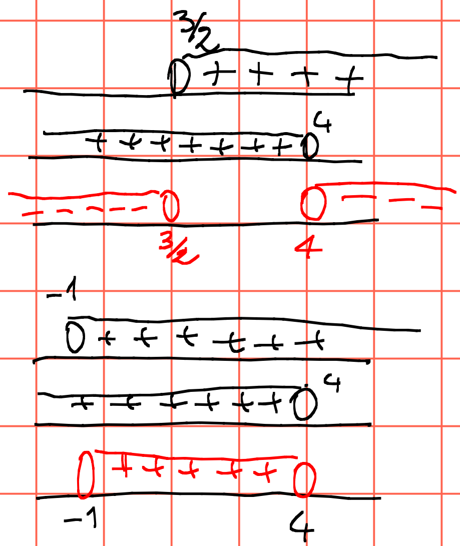
(D) $A \subset]-2, 1[$.

$$\sum_n \left| \frac{3\alpha-2}{4-\alpha} \right|^n \text{ converge sse } \left| \frac{3\alpha-2}{4-\alpha} \right| < 1$$

$$\text{sse} \quad -1 < \frac{3\alpha-2}{4-\alpha} < 1$$

$$\text{sse} \quad \begin{cases} \dfrac{3\alpha-2-4+\alpha}{4-\alpha} < 0 \\[2ex] \dfrac{3\alpha-2+4-\alpha}{4-\alpha} > 0 \end{cases}$$

$$\text{sse} \quad \begin{cases} \dfrac{4\alpha-6}{4-\alpha} < 0 \\[2ex] \dfrac{2\alpha+2}{4-\alpha} > 0 \end{cases}$$



$$\text{sse} \quad x \in \left( ]-\infty, 3/2[\cup]4, +\infty[\right) \cap]-1, 4[$$

$$\text{sse} \quad x \in \,]-1, 3/2[$$

(4) Sia data la funzione $f(x) = \begin{cases} a e^{2x-6} + x, & \text{se } x > 3 \\ \frac{x^3}{3} - 2ax + b, & \text{se } x \le 3 \end{cases}$. Per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x)$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$?

(A) a qualsiasi, $b = 7a - 6$.

(B) $a = 5, b = -1$.

(C) Nessuna delle altre risposte è vera.

(D) $a = 2, b = 8$.

$x < 3 \quad f'(x) = x^2 - 2a$

$x > 3 \quad f'(x) = 2a e^{2x-6} + 1$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \frac{27}{3} - 6a + b = f(3^-) = f(3^+) = a + 3 = \lim_{x\to 3^+} f(x)$$

$$\boxed{9 - 6a + b = a + 3}$$

$$\lim_{x\to 3^-} f'(x) = 9 - 2a = f'(3^-) = f'(3^+) = 2a + 1 = \lim_{x\to 3^+} f'(x)$$

$$\boxed{9 - 2a = 2a + 1}$$

$$\begin{cases} 4a = 8 \\ -7a + b = -6 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2 \\ -14 + b = -6 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 8 \end{cases}$$

(5) Sia $w = \dfrac{\overline{z}(z + \mathrm{i}) - \overline{z}^2}{z^2 - 1}$. Se $z = 1 - 2\mathrm{i}$, quale tra le seguenti risposte è vera?

(A) $\Re w > \Im w$.

(B) Nessuna delle altre risposte è vera.

(C) $\Re w < 0$.

(D) $\Im w = 0$.

$$\frac{(1+2i)((1-2i)+i) - (1+2i)^2}{(1-2i)^2 - 1} = \frac{5 + i - 2 - (1 - 4 + 4i)}{\cancel{1} - 4 - 4i - \cancel{1}}$$

$$= \frac{-3i + 6}{-4(1+i)} \cdot \frac{(1-i)}{(1-i)} = \frac{-3i - 3 + 6 - 6i}{-8} = -\frac{3}{8} + \frac{9}{8} i$$

(6) Si consideri l'integrale improprio $I = \int_0^1 \frac{\sqrt{x} + \arctan x}{x^{\alpha+1}(3x+1)^{5/2}}\, dx$. Quale tra le seguenti risposte è vera?

(A) Nessuna delle altre risposte è vera.

(B) I converge se $\alpha < 1/2$.

(C) I converge se $\alpha < 2$.

(D) I converge se $\alpha > 0$.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + \operatorname{arctg} x}{x^{\alpha+1}(3x+1)^{5/2}}$$

f continua su $]0,1]$

Unico pb. : $\boxed{x=0}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + x + o(x)}{x^{\alpha+1}(1+o(1))^{5/2}} \sim \frac{\sqrt{x}}{x^{\alpha+1}} = \frac{1}{x^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

$\int_0^1 f(x)dx$ si comporta come $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha+\frac{1}{2}}}$

e quest'ultimo converge se $\alpha + \frac{1}{2} < 1$

se $\alpha < \frac{1}{2}$

(7) Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme illimitato superiormente. Quale tra le seguenti affermazioni è vera?

A è limitato superiormente

(A) Esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $a < x$ per ogni $a \in A$.

(B) Esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $x < a$ per ogni $a \in A$.

A è limitato inferiormente

(C) Per ogni successione $\{x_n\}_n$ di punti di A si ha $x_n \to +\infty$. NO

(D) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x \in A$ tale che $x > n$.

A illimitato superiormente se $\sup A = +\infty$

se $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists a \in A$: $a > x$

se $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists a \in A$: $a > n$

1) Determinate le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ del'equazione

$$\left(\frac{z+\mathrm{i}}{\overline{z}-\mathrm{i}}\right)^2 = 16\,.$$

Risposta:

$\overline{z+i} = \overline{z} - i$ dunque, posto

$Y = z + i$ l'equazione diventa

$$\left(\frac{Y}{\overline{Y}}\right)^2 = 16$$

Ma questo è IMPOSSIBILE poiché

$$\left|\frac{Y}{\overline{Y}}\right| = \frac{|Y|}{|\overline{Y}|} = 1 \neq 16 = |16|$$

Altrimenti

C.E. $\overline{z} \neq i$ ovvero $\boxed{z \neq -i}$

$z = a + ib$

$$\frac{[a+i(b+1)]^2}{[a-i(b+1)]^2} = 16$$

$$a^2 - (b+1)^2 + 2ia(b+1) = 16a^2 - 16(b+1)^2 + $$
$$- 32ia(b+1)$$

$$\begin{cases} a^2 - (b+1)^2 = 16a^2 - 16(b+1)^2 \\ 2a(b+1) = 32a(b+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15a^2 = -15(b+1)^2 \\ \underbrace{30}_{\neq 0} \cdot a(b+1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -15 \cdot (b+1)^2 = 0 \\ a = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = -1 \\ a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15a^2 = 0 \\ b+1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases}$$

l'unica soluz. è $z = 0 - i = -i$

Ma questa non è accettabile

$\Rightarrow \nexists$ soluz.

2) Studiare il grafico della funzione $f(x) = (2x+4)e^{1/x}$, determinando in particolare campo di esistenza, limiti agli estremi del campo di esistenzasegno, regioni di monotonia, massimi e minimi, regioni di concavità e di convessità, asintoti della funzione f .
Tracciare poi un grafico approssimativo della funzione f .
Determinare il numero di soluzioni reali dell'equazione $f(x) = k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Risposta:

C.E. $x \neq 0$

$$f \begin{cases} >0 & x > -2 \\ <0 & x < -2 \end{cases}$$ segno

$$\lim_{x \to +\infty} (2x+4)e^{1/x} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} (2x+4)e^{1/x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} (2x+4)e^{1/x} = 0$$

$$f' = 2e^{1/x} - (2x+4)\cdot\frac{1}{x^2}\cdot e^{1/x} = \frac{2\cdot e^{1/x}}{x^2}\underbrace{(x^2-x-2)}$$

$f' = 0$ se $x = -1$ or $x = 2$

$$f' \begin{cases} >0 & x < -1 \\ <0 & -1 < x < 0 \\ <0 & 0 < x < 2 \\ >0 & 2 < x \end{cases}$$ e quindi si conoscono le regioni di monotonia

$(-1, 2/e)$ p.to di max $\qquad (2, 8\sqrt{e})$ p.to di min

$$\frac{2e^{1/x}}{x^2}\underbrace{(x^2-x-2)} = 2e^{1/x}\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) = f'$$

$$f'' = 2e^{1/x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) + 2e^{1/x}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right)$$

$$= 2e^{1/x}\cdot\frac{1}{x^4}\left(-\cancel{x^2}+x+2+\cancel{x^2}+4x\right)$$

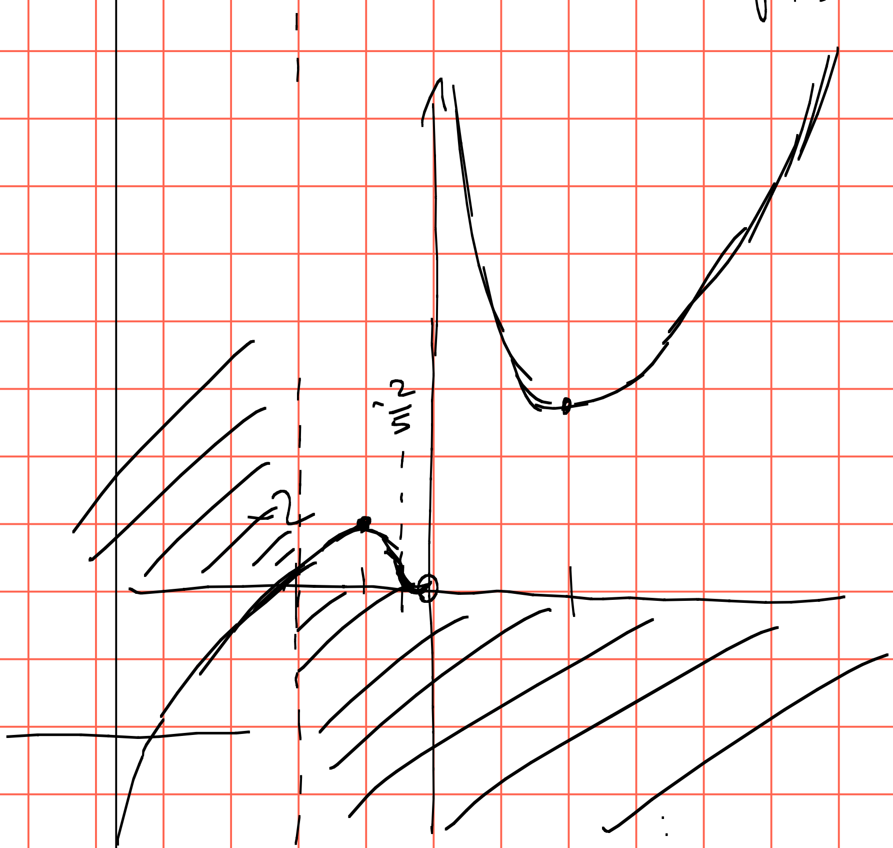
$$= 2\frac{e^{1/x}}{x^4}\left(5x+2\right)$$

$f''(x)=0$ per $x=-2/5$ $\qquad f''\begin{cases} <0 & x<-\frac{2}{5} \\ >0 & x>-\frac{2}{5} \end{cases}$ $(x\neq 0)$

e quindi si sa dove f è concava/convessa

$x=-1$ è p.to di max relativo $f(-1)=2/e$

$x=2$ " " " min relativo $f(2)=8\sqrt{e}$



$y=2x+4$ asintoto obliquo

$f(x)=k$

$k\leq 0$ $f=k$ 1 soluz.

$0<k<2/e$ $f=k$ 2 sol.

$k=2/e$ $f=k$ 1 sol

$\frac{2}{e}<k<8\sqrt{e}$ $f=k$ $\emptyset$ sol

$k=8\sqrt{e}$ $f=k$ 1 sol

$8\sqrt{e}<k$ $f=k$ 2 sol

3)

a) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2} - \frac{1}{1-x^2}}{\sin(x^2) - x^2\cos x}\,.$$

b) Calcolare poi, al variare dell'esponente $\alpha > 0$, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2} - \frac{1}{1-x^2} + \frac{x^\alpha}{2}}{\sin(x^2) - x^2\cos x}\,.$$

Risposta:

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + o(x^6)$$

$$\operatorname{sen}(x^2) = x^2 - \frac{(x^2)^3}{6} + \frac{(x^2)^5}{5!} + o(x^{10})$$

$$x^2\cos x = x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)$$

$$\frac{e^{x^2} - \frac{1}{1-x^2}}{\operatorname{sen}(x^2) - x^2\cos x} = \frac{1}{(1-x^2)}\,\frac{(1-x^2)e^{x^2} - 1}{\operatorname{sen}x^2 - x^2\cos x}$$

$$= \frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{(1-x^2)\left(1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)\right)-1}{x^2+o(x^4) - x^2\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)}$$

$$= \frac{1}{1-x^2}\,\frac{\cancel{1}+\cancel{x^2}+\frac{x^4}{2}+o(x^4)-\cancel{x^2}-x^4-\cancel{1}}{\frac{x^4}{2}+o(x^4)}$$

$$= \frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{\cancel{x^4}^{\,1}}{\cancel{x^4}_{\,1}}\cdot\frac{-\frac{1}{2}+o(1)}{\frac{1}{2}+o(1)} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -1$$

b) $$\frac{e^{x^2}-\frac{1}{1-x^2}+\frac{x^\alpha}{2}}{\operatorname{sen}(x^2)-x^2\cos x}=\frac{e^{x^2}-\frac{1}{1-x^2}}{\operatorname{sen}(x^2)-x^2\cos x}+\frac{\frac{x^\alpha}{2}}{\operatorname{sen}x^2-x^2\cos x}$$

$$=\frac{1}{1-x^2}\,\frac{-\frac{x^4}{2}+o(x^4)}{\frac{x^4}{2}+o(x^4)}+\frac{\frac{x^\alpha}{2}}{\frac{x^4}{2}+o(x^4)}$$

$$=\frac{1}{1-x^2}\,\frac{-\frac{x^4}{2}+o(x^4)+\frac{x^\alpha}{2}}{\frac{x^4}{2}+o(x^4)}=(*)$$

$$\alpha<4\quad (*)=\frac{1}{1-x^2}\,\frac{\frac{x^\alpha}{2}+o(x^\alpha)}{\frac{x^4}{2}+o(x^4)}\xrightarrow[x\to 0^+]{}+\infty$$

$$\alpha=4\quad (*)=\frac{1}{1-x^2}\,\frac{o(x^4)}{\frac{x^4}{2}+o(x^4)}\xrightarrow[x\to 0^+]{}0$$

$$\alpha>4\quad (*)=\frac{1}{1-x^2}\,\frac{-\frac{x^4}{2}+o(x^4)}{\frac{x^4}{2}+o(x^4)}\xrightarrow[x\to 0^+]{}-1$$

4) Trovate tutte le primitive della funzione $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(-1 + \ln\sqrt{x}\right)$.

Posto $a_n = \int_{1/n^4}^{1/n^{2\alpha}} f(x)\,dx$, studiare la convergenza della serie $\sum_n a_n$ al variare di $\alpha > 0$.

Risposta:

$$\int \left[-\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln\sqrt{x}\right] dx = -\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} + \int \frac{\ln\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$= -\sqrt{x} + \int \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{u'} \cdot \underbrace{\ln\sqrt{x}}_{v}\,dx$$

$$= -\sqrt{x} + \underbrace{\sqrt{x}}_{u} \cdot \underbrace{\ln\sqrt{x}}_{v} - \int \underbrace{\cancel{\sqrt{x}}}_{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cancel{\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}_{v'}\,dx$$

$$= -\sqrt{x} + \sqrt{x}\ln\sqrt{x} - \int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$= -2\sqrt{x} + \sqrt{x}\ln\sqrt{x} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$a_n = \int_{1/n^4}^{1/n^{2\alpha}} f(x)\,dx = \left[-2\sqrt{x} + \sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right]_{x=1/n^4}^{x=1/n^{2\alpha}}$$

$$= -\frac{2}{n^\alpha} + \frac{1}{n^\alpha}\ln\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^2}\ln\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= -\frac{2}{n^\alpha} - \alpha\frac{\log n}{n^\alpha} + \frac{2}{n^2} + 2\frac{\log n}{n^2}$$

Inoltre $\frac{1}{n^\alpha} = o\left(\frac{\log n}{n^\alpha}\right)$ & $\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{\log n}{n^2}\right)$.

e dunque

$$\alpha<2 \Rightarrow \frac{\log n}{n^2} = o\left(\frac{\log n}{n^\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow a_n \sim -\alpha\frac{\log n}{n^\alpha} \quad (n\to+\infty)$$

e quindi $\sum_n a_n$ si comporta come $\sum_n -\alpha\frac{\log n}{n^\alpha}$

e quest'ultima converge se $\alpha>1$

$$\alpha>2 \Rightarrow \frac{\log n}{n^\alpha} = o\left(\frac{\log n}{n^2}\right)$$

$$\Rightarrow a_n \sim 2\frac{\log n}{n^2}$$

ovvero $\sum_n a_n$ si comporta come $\sum_n 2\frac{\log n}{n^2}$
$(\forall\alpha>2)$

e quest'ultimo converge ($\forall \alpha > 2$)

Teorema

$$\sum_n \frac{\log n}{n^\alpha} \quad \text{converge} \quad \forall \alpha > 1$$

$$\text{diverge a } +\infty \quad \forall \alpha \leq 1$$

dim

$$\alpha \leq 1 \Rightarrow n^\alpha \leq n \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\log n}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} \quad \text{ma } \sum_n 1/n \text{ diverge}$$

$$\Rightarrow \sum_n \frac{\log n}{n^\alpha} \text{ diverge } \forall \alpha \leq 1$$

$$\alpha > 1 \Rightarrow \alpha - 1 > 0 \Rightarrow \frac{\alpha-1}{2} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\log n / n^\alpha}{1/n^{1+\frac{\alpha-1}{2}}} = \frac{\log n}{n^{\alpha - 1 - \frac{\alpha-1}{2}}} =$$

$$= \frac{\log n}{n^{\frac{\alpha-1}{2}}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha-1}{2}} \cdot \log n$$

$$= -\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha-1}{2}} \cdot \log \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

(Ricorda $x^\alpha \log x \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \quad \forall \alpha > 0$!!)

Quindi

$$\frac{\log n}{n^\alpha} = o\left(\frac{1}{n^{1+\frac{\alpha-1}{2}}}\right) \quad \& \quad \sum_n \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{\alpha-1}{2}}$$

converge

$$\Rightarrow \sum_n \frac{\log n}{n^\alpha} \text{ converge } \forall \alpha > 1$$

$\lightning$