Correzione scritto Analisi 1 10 settembre 2012

Correzione quiz

Esercizio 1. Se $z = 1 - 3\mathrm{i}$, il modulo di $\dfrac{z^2 - |z|^2}{z - \mathrm{i}\bar{z}}$ è

(A) $3\sqrt{5}/2$.

(B) $9/2$.

(C) $6/5$.

(D) 0.

$$\omega = \frac{(1-3i)^2 - 10}{1-3i-i(1+3i)} \Rightarrow \omega = \frac{1-9-6i-10}{1-3i-i+3} \Rightarrow \omega = \frac{-18-6i}{4-4i}$$

$$\Rightarrow \omega = -\frac{6}{4}\,\frac{3+i}{1-i}\,\frac{1+i}{1+i} \Rightarrow \omega = -\frac{3}{2}\,\frac{3+3i+i-1}{2}$$

$$\Rightarrow \omega = -\frac{3}{4}(2+4i) \Rightarrow \omega = -\frac{3}{2}(1+2i) \Rightarrow |\omega| = \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

ovvero la risposta corretta è la (A)

Esercizio 2. Un sacchetto contiene due palline blu e un po' di rosse. Pescando due palline a caso, la probabilità che siano proprio le due blu è $1/21$. Le palline rosse nel sacchetto sono

(A) 5.

(B) 3.

(C) 19.

(D) 7.

Posto $N = x+2$, dove $x \equiv$ n.ro palline rosse

la probabilità cercata è $P = 1/21 = \left[\binom{x+2}{2}\right]^{-1}$

e dunque $\dfrac{(x+2)!}{2!\,x!} = 21 \iff (x+1)(x+2) = 42$

$$\iff x = 5$$

ovvero la risposta corretta è la (A)

Esercizio 4. I valori di $\alpha > 0$ per i quali converge $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha + 1}{x^{3\alpha} + x^3}\, dx$ sono

(A) $\alpha < 1/3$.

(B) $1/3 < \alpha < 1/2$.

(C) nessun valore di α.

(D) $\alpha > 1/2$.

$$f_\alpha(x) = \frac{x^\alpha + 1}{x^{3\alpha} + x^3} \qquad \int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx = \underbrace{\int_0^1 f_\alpha(x)\,dx}_{1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx}_{2}$$

e l'integrale converge se convergono 1 e 2

• Quando $x \to 0^+$, $f_\alpha(x) \sim \dfrac{1}{x^{3\alpha} + x^3} = \dfrac{1}{x^\beta}$

dove $\beta = \min\{3\alpha, 3\} = \begin{cases} 3\alpha, & \text{se } \alpha \leq 1 \\ 3, & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$

$\int_0^1 f_\alpha(x)\,dx$ converge se $\beta < 1$ se $3\alpha < 1$ se $\boxed{\alpha < 1/3}$

• Quando $x \to +\infty$, $f_\alpha(x) \sim \dfrac{x^\alpha}{x^{3\alpha} + x^3} = \dfrac{1}{x^{2\alpha} + x^{3-\alpha}} = \dfrac{1}{x^\gamma}$

$\gamma = \max\{2\alpha, 3-\alpha\} = \begin{cases} 3-\alpha, & \text{se } \alpha \leq 1 \\ 2\alpha, & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$

allora $\gamma \geq 2 \ \forall \alpha$ allora $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$ $\boxed{\text{converge } \forall \alpha}$

Infine, $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$ converge $\forall \alpha < 1/3$

ovvero la risposta corretta è la (A)

Esercizio 5. Sia S l'insieme delle soluzioni della disequazione $\log(x+1) + \log(x-2) \leq \log 10$. Allora

(A) $]2,4[\subset S$.

(B) $]-3,-1[\subset S$.

(C) $]-1,2[\subset S$.

(D) S non è limitato superiormente.

Il campo di esistenza di $\log(x+1) + \log(x-2)$ è

la soluzione del sistema $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}$

ovvero $x \in]2, +\infty[$

La disequazione è equivalente a $\log(x+1)(x-2) \le \log 10$

ovvero a ($\log x$ è strettamente crescente)

$$\begin{cases} (x+1)(x-2) \le 10 \\ C.E. \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-x-12 \le 0 \\ C.E. \end{cases} \iff \begin{cases} (x-4)(x+3) \le 0 \\ C.E. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \in [-3,4] \\ x \in]2,+\infty[\end{cases} \iff x \in]2,4] \equiv S$$

Quindi la risposta corretta è la (A)

Esercizio 6. Sia $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(ax) + e^{2bx} & \text{se } x \ge 0 \\ a\cos x + b(1-2x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Allora f è derivabile su tutto $\mathbb{R}$

(A) se $a = 4/3$ e $b = -1/3$.

(B) se $a = -4b$ per ogni $b \in \mathbb{R}$.

(C) se $a = 0$ e $b = 1$.

(D) se $a = 3$ e $b = -2$.

$$f(0^-) = a+b = 1 = f(0^+)$$

$$f' = \begin{cases} a\cos(ax) + 2be^{2bx}, & \text{se } x \ge 0 \\ -a\operatorname{sen}(x) - 2b, & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad f'(0^-) = -2b = a+2b = f'(0^+)$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a+4b=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3b=-1 \\ a=1-b \end{cases} \quad \begin{cases} b=-1/3 \\ a=4/3 \end{cases}$$

dunque la risposta corretta è la (A)

Esercizio 7. Se $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = 1$, allora la funzione $f(x)$ può essere

(A) $f(x) = x - 1/6$.

(B) $f(x) = x$.

(C) $f(x) = x^2/5$.

(D) $f(x) = x^4/4$.

$$\int_{-1}^{2}(x-1/6)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{6}\right]_{-1}^{2} = 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = 1$$

$$\int_{-1}^{2} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = 2 - \frac{1}{2} \ne 1 \qquad \int_{-1}^{2} \frac{x^2}{5}\,dx = \left[\frac{x^3}{15}\right]_{-1}^{2} = \frac{8}{15} + \frac{1}{15} \ne 1$$

$$\int_{-1}^{2} x^4/4\,dx = \left[\frac{x^5}{20}\right]_{-1}^{2} = \frac{8}{5} + \frac{1}{20} \ne 1$$ La risposta corretta è la (A)

Correzione secondo scritto

1) Determinate $z \in \mathbb{C}$ sapendo che $\Im z < 0$ e che una delle radici quadrate del numero z coincide con $2\bar{z}$.

Si deve risolvere il sistema $\begin{cases} z = 4\bar{z}^2 \\ \Im m\, z < 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} a+ib = 4(a^2-b^2-2iab) \\ b<0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 4a^2-4b^2 \\ b = -8ab \\ b<0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = -1/8 \\ b<0 \\ -1/8 = \cancel{\frac{4}{64}}^{\,1}_{\,16} - 4b^2 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1/8 \\ b<0 \\ 4b^2 = 3/16 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1/8 \\ b = -\sqrt{3}/8 \end{cases}$$

3) Calcolate il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\operatorname{sen} x + \cos x) - x\cos(\sqrt{2x})}{x - \arctan x}.$$

(Solo Analisi 1) Calcolate, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\operatorname{sen} x + \cos x) - x\cos(\sqrt{2x})}{x^\alpha - \arctan x^\alpha}.$$

$$\log\left(x - \frac{x^3}{6} + 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) - x\left(1 - x + \frac{4}{24}x^2 + o(x^2)\right)$$

$$= \left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)^3 - x + x^2 - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$= \cancel{x} - \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}\left(\cancel{x^2} - x^3\right) + \frac{x^3}{3} - \cancel{x} + \cancel{x^2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$= x^3\,\frac{-1+3+2-1}{6} + o(x^3) = \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$x - \operatorname{arctg} x = \cancel{x} - \cancel{x} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

quindi il limite è $\boxed{3/2}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\operatorname{sen}x+\cos x) - x\cos\sqrt{2x}}{x^{\alpha} - \operatorname{arctg} x^{\alpha}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3/2}{x^{3\alpha}/3} = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha<1 \\ 3/2, & \text{se } \alpha=1 \\ +\infty, & \text{se } \alpha>1 \end{cases}$$

---

2) Sia $g(x) = \operatorname{sen} x - x\cos x$. Trovate lo sviluppo di Taylor di ordine 5 e determinate l'ordine di infinitesimo e la parte principale di infinitesimo di $g(x)$ per $x \to 0$.
Posto $a_n = g\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, studiate la convergenza della serie numerica $\sum_n a_n$ al variare del parametro $\alpha > 0$.

$$g(x) = \cancel{x} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - x\left(\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + o(x^5)$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + o(x^5)$$

$$\text{ordine}\,(g(x)) = 3$$

$$\text{p.p.}\,(g(x)) = \frac{x^3}{3}$$

Studiamo la convergenza di $\sum_n a_n$. Essendo $\alpha>0$, $1/n^\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ e dunque $g(1/n^\alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$$a_n = g\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)^3 + o\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)$$

$$= \frac{1}{3n^{3\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right) \sim \frac{1}{3n^{3\alpha}} = b_n$$

Per il criterio del confronto asintotico, $\sum_n a_n$ converge se $\sum_n b_n$ converge

A sua volta $\sum_n b_n$ converge se $3\alpha > 1$
se $\alpha > 1/3$

Quindi $\sum_n a_n$ converge se $\alpha > 1/3$

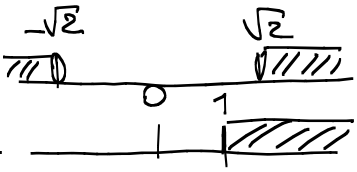
4) Sia data la funzione $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2}{x^2 - 2}$. Calcolare il dominio, il segno, i limiti della funzione agli estremi del dominio, gli asintoti obliqui, le regioni di monotonia.
Tracciate poi un grafico approssimativo della funzione.
~~Trovate la primitiva di f definita nell'intervallo $[-1,1]$ che si annulla nel punto $x_0 = 0$.~~
(Solo Analisi 1) Determinate al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f(x) = k \\ x \geq 1. \end{cases}$$

Dominio $= \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

$\boxed{\text{Segno}}$ $x^2 - 2 > 0$ se $|x| > \sqrt{2}$ se

$x^3 - x^2 \geq 0$ se $x^2(x-1) \geq 0$ se



quindi $f \geq 0$ se $x \in]-\sqrt{2}, 1] \cup]\sqrt{2}, +\infty[$

$\boxed{\text{Limiti}}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f = +\infty$ $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}^+} f = +\infty$ $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}^-} f = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -\sqrt{2}^-} f = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -\sqrt{2}^+} f = +\infty$

$\boxed{\text{Asintoti}}$ Non ci sono asintoti orizzontali

$\boxed{\text{Asintoti verticali}}$ $x = -\sqrt{2}$ e $x = \sqrt{2}$

$\boxed{\text{Asintoti obliqui}}$ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)/x = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 2} = 1 = m$

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x^3} - x^2 - \cancel{x^3} + 2x}{x^2 - 2} = -1 = q$$

dunque $r(x) = x - 1$ è asintoto obliquo per f quando $x \to \pm\infty$

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x^2 - 2} \longrightarrow f'(x) = \frac{(3x^2 - 2x)(x^2 - 2) - 2x(x^3 - x^2)}{(x^2 - 2)^2}$$

$$= \frac{3x^4 - 6x^2 - \cancel{2x^3} + 4x - 2x^4 + \cancel{2x^3}}{(x^2 - 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^4-6x^2+4x}{(x^2-2)^2} = \frac{x(x^3-6x+4)}{(x^2-2)^2}$$

$2^3-6\cdot 2+4=0$

$\Downarrow$

$f'(2)=0$

$x^3 \quad -6x+4 \;|\; x-2$

$x^3-2x^2 \qquad\quad | \; x^2+2x-2$

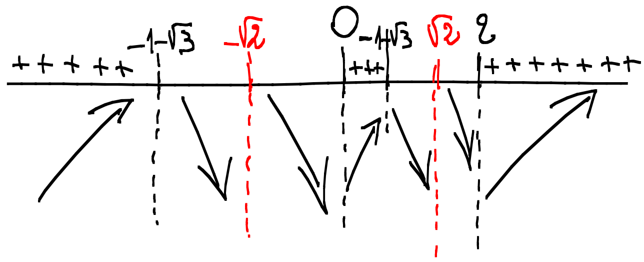
$2x^2-6x+4$

$2x^2-4x$

$-2x+4$

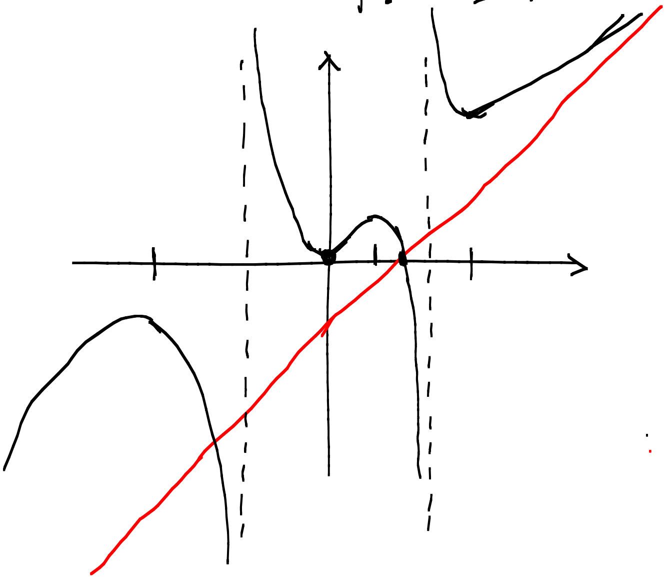
$$= \frac{x(x-2)(x^2+2x-2)}{x^2-2}$$

$$= \frac{x(x-2)(x-(-1-\sqrt3))(x-(-1+\sqrt3))}{x^2-2}$$



Studio della Monotonia di $f(x)$

$f'>0$ se $x \in]-\infty, -1-\sqrt3[\cup]0, -1+\sqrt3[\cup]2, +\infty[$



$x=-1-\sqrt3$ p.to di max rel.

$x=0$ " " min. "

$x=-1+\sqrt3$ " " max "

$x=2$ " " min. "

Calcolo della primitiva: $\int (x-1)\,dx = \frac{x^2}{2} - x + c$

$$\frac{x-1}{x^2-2} = \frac{A}{x-\sqrt2} + \frac{B}{x+\sqrt2} = \frac{Ax + A\sqrt2 + Bx - B\sqrt2}{x^2-2}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A-B=-1/\sqrt2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2A = \frac{\sqrt2-1}{\sqrt2} \\ 2B = \frac{\sqrt2+1}{\sqrt2} \end{cases} \qquad \begin{matrix} A = \frac{\sqrt2-1}{2\sqrt2} \\ B = \frac{\sqrt2+1}{\sqrt2} \end{matrix}$$

$$\frac{x-1}{x^2-2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\,\frac{1}{x-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\,\frac{1}{x+\sqrt{2}}$$

$$\int 2\,\frac{x-1}{x^2-2}\,dx = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{x-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{x+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{(\sqrt{2}-1)\log|x-\sqrt{2}| + (\sqrt{2}+1)\log|x+\sqrt{2}|\right\} + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{2}\log|x^2-2| + \log\left|\frac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}\right|\right\} + c$$

$$= \log|x^2-2| + \sqrt{2}\log\left|\frac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}\right| + c$$

$$\int\frac{x^3-x^2}{x^2-2}\,dx = \frac{x^2}{2} - x + \log|x^2-2| + \sqrt{2}\log\left|\frac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}\right| + c = F(x)$$

$$F(0) = \log 2 + c = 0 \implies c = -\log 2$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - x + \log|x^2-2| + \sqrt{2}\log\left|\frac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}\right| - \log 2$$

$k \le 0$	$f(x)=k$	1 soluzione	(per $x>1$)
$0<k<2=f(2)$	$f(x)=k$	ϕ "	"
$k=2=f(2)$	$f(x)=k$	1 "	"
$f(2)<k$	$f(x)=k$	2 "	"