

1) Determinate $z \in \mathbb{C}$ sapendo che $\Im z < 0$ e che una delle radici quadrate del numero z coincide con $2\bar{z}$.

2) Sia $g(x) = \sin x - x \cos x$. Trovate lo sviluppo di Taylor di ordine 5 e determinate l'ordine di infinitesimo e la parte principale di infinitesimo di $g(x)$ per $x \rightarrow 0$.

Posto $a_n = g\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, studiate la convergenza della serie numerica $\sum_n a_n$ al variare del parametro $\alpha > 0$.

3) Calcolate il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\sin x + \cos x) - x \cos(\sqrt{2x})}{x - \arctan x}.$$

(Solo Analisi 1) Calcolate, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\sin x + \cos x) - x \cos(\sqrt{2x})}{x^\alpha - \arctan x^\alpha}.$$

4) Sia data la funzione $f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x^2 - 2}$. Calcolare il dominio, il segno, i limiti della funzione agli estremi del dominio, gli asintoti obliqui, le regioni di monotonia.

Tracciate poi un grafico approssimativo della funzione.

(Solo Analisi 1) Determinate al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f(x) = k \\ x \geq 1. \end{cases}$$