Prima prova scritta di Analisi 1 del 17 gennaio 2012

Esercizio 1. Sia data l'equazione complessa $(*)\ 9z^2 - 6(2\mathrm{i}+1)z + 4\mathrm{i} = 3$. Quale tra le seguenti risposte è **vera**?

(A) Nessuna delle altre risposte è vera.
(B) (*) non ha soluzioni.
(C) (*) ha due soluzioni distinte.
(D) (*) ha almeno una soluzione reale.

Esercizio 2. In quanti modi, con 15 palline diverse, si possono formare tre mucchietti, uno da 5, uno da 7 e uno da 3 palline ?

(A) $\binom{15}{5} \cdot \binom{10}{7}$.
(B) $\binom{15}{5} \cdot \binom{15}{7} \cdot \binom{15}{3}$.
(C) $\binom{15}{5} + \binom{15}{7} + \binom{15}{3}$.
(D) $\dfrac{15 \cdot 14 \cdot 13}{5 \cdot 7 \cdot 3}$.

Esercizio 3. Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali. Quale tra le seguenti affermazioni è **falsa**?

(A) Se $\{a_n\}$ ha limite, allora è limitata.
(B) Se $\{a_n\}$ è infinitesima, allora ha limite.
(C) Se $\{a_n\}$ è crescente, allora ha minimo.
(D) Se $\{a_n\}$ ha limite, allora anche $\{|a_n|\}$ ha limite.

Esercizio 4. Sia $A \subset \mathbb{R}^+$ l'insieme degli $\alpha > 0$ per cui converge l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \arctan(x^{2\alpha})}{3x^2 + 2x^3}\, dx \ .$$

Allora

(A) $A = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid 1/3 < \alpha < 2\}$.
(B) $A = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid 1/3 < \alpha < 2/3\}$.
(C) $A = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid 1/3 < \alpha < 1\}$.
(D) nessuna delle altre risposte è vera.

Esercizio 5. Se $f(x)$ ha derivata uguale a $x \arctan x$ e $f(1) = -1/2$, allora

(A) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2} \arctan x - \dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}$.
(B) $f(x) = x^2 \arctan x - \dfrac{x}{2} \log(x^2+1) + c$.
(C) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} \arctan x - \dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{8}$.
(D) $f(x) = \arctan x + \dfrac{x}{1+x^2} - \dfrac{\pi}{4} - 1$.

Esercizio 6. Se S è l'insieme delle soluzioni della disequazione $|x^2 - 1| + x < |x|$, allora

(A) S è limitato superiormente.
(B) $S =]-1-\sqrt{2}, 0[$.
(C) S è vuoto.
(D) $-1 \notin S$.

Esercizio 7. Se f ha in $x = 0$ un punto di massimo locale, un suo sviluppo di Taylor può essere

(A) $f(x) = 3 - x^4 + o(x^4)$.
(B) $f(x) = x + x^2 + o(x^2)$.
(C) $f(x) = 2 + x^2 + o(x^3)$.
(D) $f(x) = -2x^3 + o(x^3)$.
