Corso di Recupero di Analisi 1 – 2015
22 Maggio 2015
Applicazioni varie sul calcolo di derivate
ancora una applicazione sulle serie.

1) Calcolare le derivate di:

- $y = 2\sqrt{2}\,x^2 \ln x - \sqrt{2}\,x^2$
- $y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$
- $y = \log\left(\cos\sqrt{x^2+1}\right)$
- $y = 2\,\mathrm{tg}^2(x^3+1)$
- $y = (\operatorname{sen} x)^{\log x}$

2) Sia $f(x) = x - 3e^{-2x}$. Qual è il valore di $(f^{-1})'(-3)$?

a) $-\frac{1}{2}$

b) non esiste: f^{-1} non è derivabile in $x=-2$

c) nessuna

d) $\frac{1}{5}$

3) Data $f(x)$ derivabile in x_0, quale è vera?

a) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = 0$

b) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0-h) - f(x_0-3h)}{2h} = -f'(x_0)$

c) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0-h) - f(x_0-2h)}{h} = 3f'(x_0)$

d) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+4h) - f(x_0+2h)}{h} = 2f'(x_0)$

4) La derivata di $F(x)=\int_x^{x+\pi} \operatorname{sen} t^2\, dt$ in $x=0$

a) $F'(0)=\operatorname{sen}\pi^2$

b) $F'(0)=\pi \operatorname{sen}\pi^2$

c) $F'(0)=\int_0^{\pi}\cos t^2\, dt$

d) $F'(0)=0$

5) Per quali valori di $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x)=\begin{cases}\alpha\arctg(4x)+\beta\cos(\pi+x)+e^{2x} & x\leq 0\\ 5\alpha-2\beta x & x>0\end{cases}$$

risulta derivabile su tutto $\mathbb{R}$?

a) $\alpha=\frac{2}{3},\ \beta=-\frac{7}{3}$

b) $\alpha=2,\ \beta=-9$

c) $\alpha=-1,\ \beta=1$

d) $\alpha=\frac{1}{3},\ \beta=-\frac{2}{3}$

6) Sia $f(x)=x^{\log x}$, $x>0$. L'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ in $x_0=\frac{1}{e}$, è

a) $y+2e^2x=3e$

b) $e^2y-2x=\frac{2}{e}$

c) $ey+2e=e^2+\frac{2x}{e}$

d) nessuna

7) Data la funzione $y=\log x+\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$, determinare dominio, limiti agli estremi del dominio, intervalli di monotonia, eventuali punti di max/min locali, intervalli di concavità/convessità - Disegnare il grafico -

8) Quale tra le seguenti funzioni ha massimo assoluto?

a) $\log x-x$

b) $\log x+\operatorname{sen}x$

c) e^x-x

d) e^x+x

9) Data la funzione $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2+2}$, l'equaz. della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto di ascisse 1 è

a) $12y + \sqrt{3} = 4\pi + x\sqrt{3}$

b) $y = \sqrt{3} + \frac{1}{4}(x-1)$

c) $12y + x\sqrt{3} = 4\pi + \sqrt{3}$

d) nessuna

10) Sia $f(x) = 4x^3 + x^4 - 4$. Allora

a) $f(x)$ è convessa su $[0, +\infty[$

b) $f(x)$ è decrescente su $]-\infty, -1[$

c) $f(x)$ ha massimo su $\mathbb{R}$

d) $f(x) > -30 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

11) Per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} a\,e^{2x} + b \operatorname{sen} x & x \geq 0 \\ a \log(1-x) + 7x + 2b & x < 0 \end{cases}$$

è derivabile su $\mathbb{R}$?

a) $a = 2, \ b = 1$

b) $b = 7 - 3a, \ \forall a \in \mathbb{R}$

c) $b = 7/5 \quad a = 2b$

d) $b = 0 \quad a = 7/3$

12) Sia $a_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$

- Calcolare $\lim_{n\to\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$
- Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{\alpha}$.