11 APRILE 2014 (6^ settimana)

Argomenti trattati:

Argomento prevalente :

- Integrali generalizzati di vario tipo
- Teoremi del confronto e del confronto asintotico relativi agli integrali

Esercizi svolti dall'insegnante :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx \ ; \ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx \ ; \ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & se\ \alpha > 1 \\ +\infty & se\ \alpha \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_0^{1} \frac{1}{x}dx \ ; \quad \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}dx \ ; \ \int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & se\ \alpha < 1 \\ +\infty & se\ \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Calcolare: $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+4}dx$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{xlogx}dx; \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{xlog^2x}dx; \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(logx)^\alpha}dx = \begin{cases} +\infty & se\ \ \alpha \leq 1 \\ \frac{(log2)^{1-\alpha}}{\alpha-1} & se\ \ \alpha > 1 \end{cases}$$

Per quali valori di $\alpha \geq 0$ l'integrale generalizzato $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{e^{1/x}-1}}{x^\alpha+1}dx$ converge ?

Per quali valori di $\alpha > 0$ l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^{3\alpha}}dx$?

Scheda alunni: esercizi da svolgere in classe

1)

Calcolare $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$

2)

Calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

3)

L'integrale generalizzato $\int_0^1 \frac{x^\alpha}{log(1+x^4)} dx$ è convergente :

A) Se $^3/_2 \leq \alpha \leq 3$ B) se $\alpha < 0$ C) nessuna delle altre risposte è vera D) se $\alpha > 3$

4)

Esercizio 4. Sia $A \subset \mathbb{R}^+$ l'insieme degli $\alpha > 0$ per cui converge l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x^\alpha) + x^\alpha \sqrt{x}}{x^3 + x^4} dx .$$

Allora

(A) $A = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid 2 < \alpha < 3\}$.

(B) $A = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid 2 < \alpha < 5/2\}$.

(C) A è l'insieme vuoto.

(D) $A = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid 3/2 < \alpha < 5/2\}$.

5)

Problema 4 : trovare tutte le primitive della funzione $f(x) = e^{-\sqrt{x}}$.

Calcolare poi l'integrale generalizzato $\int_4^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$

6)

Determinare per quali valori di $\alpha > 0$ l'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha + x^2} dx$ converge.

7)

Calcolare $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$.

Scheda settimanale dei compiti assegnati per casa

1) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+1} dx$ [+∞]

2) $\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$ [1]

3) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[2]{1-x^2}} dx$ [$\frac{\pi}{2}$]

4) $\int_0^2 \frac{1}{(x-2)^2} dx$ [+∞]

5) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$ [+∞]

6) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$ [+∞]

Esercizi supplementari di riepilogo

1)Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)=\frac{2x-1}{3x+2}$ nel punto (1,f(1)).

2) calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$f(x)=log^2(senx)$; $g(x)=x^{2x^2+1}$ (sugg. Scrivere *g(x)* come $g(x)=e^{(2x^2+1)logx}$)

3) calcolare i seguenti integrali con il metodo di sostituzione:

a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-1}}$ (sugg. $\sqrt{2x-1}=t \rightarrow x=\frac{t^2+1}{2} \rightarrow dx=$ ……..)

b) $\int \frac{log^2x}{x}dx$ (sugg. $logx=t \rightarrow x=e^t \rightarrow dx=$ ……..)

4) Dire per quale valore di *a* la funzione $f(x)=\begin{cases} x^2+2ax+a & se\ x>0 \\ \sqrt{x+2} & se\ x\in[-2\ ;0] \end{cases}$ è continua in x = 0 .

La funzione così ottenuta è anche derivabile in x=0 ?

5) Determinate per quali valori di x converge la serie $\sum_{n\geq 0} (|x|-1)^n$.

6) Stabilire se l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+4}dx$ converge o diverge .

7) Stabilire il carattere delle seguenti serie :

a) $\sum_{n\geq 0} \frac{n+3}{n^3+n^2+4}$ (sugg. $\frac{n+3}{n^3+n^2+4} \sim$ …….)

b) $\sum_{n\geq 1} \frac{logn}{n}$ (sugg. Se $n\geq 3$, $logn>1$ quindi $\frac{logn}{n}>\frac{1}{n}$ e poichè $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge ………)

c) $\sum_{n\geq 1}\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{3}{\sqrt{n}}\right]$ (sugg. La serie $\sum_{n\geq 1}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ converge mentre $\sum_{n\geq 1}\frac{3}{\sqrt{n}}$ ……….. quindi la serie data……….).

8) Determinare α e β in modo che la funzione $f(x)=\begin{cases} sen(\pi x) & se\ x>1 \\ \alpha x+\beta & se\ x\leq 1 \end{cases}$ sia derivabile in tutto R.

9) Calcolate $\int_0^{-\infty} \frac{x}{1+9x^4}dx$ (sugg. Porre $3x^2$ = t ……….)

10) Calcolate $\int x^3e^xdx$ (sugg. Integrare per parti tre volte con e^x …..)

11) determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 3 in x_0 =0 di $\sqrt{1+senx}$

(sugg. $\sqrt{1+t}=(1+t)^{1/2}=1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+\frac{1}{16}t^3+o(t^3)$ per t→0, con $t=senx=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$ per x→0)

RISPOSTE

1) $\left[y = \frac{4}{7}x - \frac{2}{7}\right]$; 2) $f'(x) = 2\log(senx) \cdot \frac{1}{senx} \cdot cosx$; $g'(x) = x^{2x^2+1} \cdot \left[4xlogx + \frac{2x^2+1}{x}\right]$

3a) $2arctan\sqrt{2x-1}$ + C 3b) $\frac{1}{3}log^3x$ 4) è continua in x=0 se $a = \sqrt{2}$ ma non è derivabile. 5) $0 < |x| < 2$

6) diverge a $+\infty$; 7a) converge ; 7b) diverge ; 7c) diverge ; 8) $\alpha = -\pi$ e $\beta = \pi$; 9) $\pi/12$; 10) $e^x(x^3-3x^2+6x-6)+C$

11) $f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + o(x^3)$