Compito n. 1 (Gennaio 2013)

PROBLEMA 1

Determinate le soluzioni (z, w), con $z, w \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} \bar{z} + 2\mathrm{i}\dfrac{zw}{|z|} - 6\mathrm{i} = 0 \\ |z|\bar{z} - 2w = 0 \,. \end{cases}$$

Ricavando dalla seconda equazione $w = |z|\bar{z}/2$ e sostituendolo nella prima questa diviene, ricordando che $z\bar{z} = |z|^2$,

$$\bar{z} + \mathrm{i}z\bar{z} - 6\mathrm{i} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{z} + \mathrm{i}|z|^2 - 6\mathrm{i} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{z} = \mathrm{i}(6 - |z|^2)\,.$$

Allora $\bar{z}$ è immaginario puro, quindi $z = \mathrm{i}b$ con $b \in \mathbb{R}$ e l'equazione diventa

$$-b = 6 - b^2 \quad \Longleftrightarrow \quad b^2 - b - 6 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b = \begin{cases} -2 \\ 3\,. \end{cases}$$

Ma $z = -2\mathrm{i} \Rightarrow w = 2\mathrm{i}$, mentre $z = 3\mathrm{i} \Rightarrow w = -9\mathrm{i}/2$, quindi le soluzioni sono

$$z = -2\mathrm{i}\,, \quad w = 2\mathrm{i} \qquad \text{e} \qquad z = 3\mathrm{i}\,, \quad w = -\frac{9}{2}\mathrm{i}\,.$$

PROBLEMA 2

Sia data la funzione

$$\boldsymbol{f(x) = \log x - 4 + \frac{4}{1+\log x}} \; .$$

a) **Determinatene il dominio, i limiti agli estremi del dominio, il segno, gli zeri, gli asintoti e gli intervalli di monotonia, quindi tracciate un grafico approssimativo di $\boldsymbol{f}$.**

b) **Determinate al variare di $\boldsymbol{k \in \mathbb{R}}$ il numero di soluzioni dell'equazione $\boldsymbol{f(x) = k}$.**

La funzione f è definita nei punti in cui il logaritmo esiste e non vale -1 , cioè per $x > 0$ con $x \neq 1/\mathrm{e}$. La frazione tende a zero sia per $x \to 0^+$ che per $x \to +\infty$, perciò

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (\log x - 4) = -\infty \; , \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} (\log x - 4) = +\infty \; .$$

Invece per $x \to (1/\mathrm{e})^{\pm}$ abbiamo $\log x \to (-1)^{\pm}$ quindi $1 + \log x \to 0^{\pm}$ e

$$\lim_{x\to (1/\mathrm{e})^-} f(x) = -\infty \; , \qquad \lim_{x\to (1/\mathrm{e})^+} f(x) = +\infty \; .$$

Per quanto riguarda il segno, posto $t = \log x$ consideriamo la disequazione

$$t - 4 + \frac{4}{1+t} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{t^2-3t}{1+t} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad [-1 < t \leq 0 \quad \text{oppure} \quad t \geq 3] \; .$$

Allora la funzione f è positiva per

$$-1 < \log x < 0 \quad \text{oppure} \quad \log x > 3 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\mathrm{e}} < x < 1 \quad \text{oppure} \quad x > \mathrm{e}^3 \; ,$$

si annulla per $x = 1$ e per $x = \mathrm{e}^3$ ed è negativa per $0 < x < 1/\mathrm{e}$ e per $1 < x < \mathrm{e}^3$. Abbiamo già visto che c'è un asintoto verticale sia per $x = 0$ che per $x = 1/\mathrm{e}$, e sappiamo che all'infinito non vi è un asintoto orizzontale; vediamo che all'infinito non vi sono asintoti obliqui calcolando

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \Big(\frac{\log x}{x} - \frac{4}{x} + \frac{4}{x(1+\log x)} \Big) = 0 \; .$$

La derivata di f è

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(1+\log x)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x(1+\log x)^2} \big((1+\log x)^2 - 4 \big) \; .$$

Dato che

$$\begin{aligned} (1+t)^2 - 4 > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 1 + t < -2 \quad \text{oppure} \quad 1 + t > 2 \\ &\Longleftrightarrow \quad t < -3 \quad \text{oppure} \quad t > 1 \; , \end{aligned}$$

tenendo conto del dominio di f e di f' abbiamo

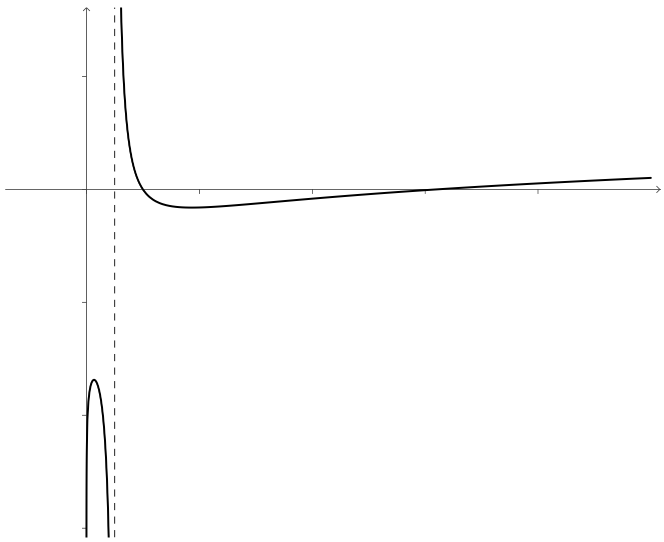
$$\begin{aligned} &f'(x) > 0 \quad \text{se } 0 < x < \mathrm{e}^{-3} \text{ oppure } x > \mathrm{e} \\ &f'(x) = 0 \quad \text{se } x = \mathrm{e}^{-3} \text{ oppure } x = \mathrm{e} \\ &f'(x) < 0 \quad \text{se } \mathrm{e}^{-3} < x < \mathrm{e}^{-1} \text{ oppure } \mathrm{e}^{-1} < x < \mathrm{e}. \end{aligned}$$

Allora la funzione f

$$\begin{aligned} &\text{cresce in }]0, \mathrm{e}^{-3}] \\ &\text{decresce in } [\mathrm{e}^{-3}, \mathrm{e}^{-1}[\\ &\text{decresce in }]\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}] \\ &\text{cresce in } [\mathrm{e}, +\infty[\end{aligned}$$

e possiamo tracciare il grafico di f dopo aver calcolato

$$f(\mathrm{e}^{-3}) = -3 - 4 + \frac{4}{1-3} = -9 \,, \qquad f(\mathrm{e}) = 1 - 4 + \frac{4}{1+1} = -1 \,.$$



A questo punto, l'equazione $f(x) = k$ ha due soluzioni per $k < -9$ e per $k > -1$, una soluzione per $k = -9$ e per $k = -1$ e nessuna soluzione per $-9 < k < -1$.

PROBLEMA 3

Considerate la funzione $f(x) = \cos(3x) - \mathrm{e}^{-x^2/2} - \operatorname{sen}(2x) \cdot \log(1-2x) - 4x^3$.
a) Determinatene l'ordine di infinitesimo e la parte principale per $x \to 0$.
b) Posto $a_n = f(1/n)$, determinate per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge $\sum n^\alpha a_n$.
c) Posto $F(x) = \int_0^{x^2} f(t)\,dt$ calcolate $\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x^{10}}$.

Abbiamo

$$\begin{aligned}
\cos(3x) &= 1 - \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^4}{24} + o(x^5) = 1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{8}x^4 + o(x^5) \\
\mathrm{e}^{-x^2/2} &= 1 + (-x^2/2) + \frac{(-x^2/2)^2}{2} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4) \\
\operatorname{sen}(2x) &= 2x - \frac{(2x)^3}{6} + o(x^4) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^4) \\
\log(1-2x) &= -2x - \frac{(2x)^2}{2} - \frac{(2x)^3}{3} + o(x^3) = -2x - 2x^2 - \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

perciò

$$\operatorname{sen}(2x) \cdot \log(1-2x) = -4x^2 - 4x^3 - \frac{16}{3}x^4 + \frac{8}{3}x^4 + o(x^4) = -4x^2 - 4x^3 - \frac{8}{3}x^4 + o(x^4)$$

e quindi

$$f(x) = 1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{8}x^4 - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + 4x^2 + 4x^3 + \frac{8}{3}x^4 + o(x^4) - 4x^3 = \frac{71}{12}x^4 + o(x^4) \ .$$

Allora f è un infinitesimo di ordine 4 con parte principale $71x^4/12$.
Osserviamo che

$$a_n = \frac{71}{12n^4} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big) = \frac{71}{12n^4}\Big(1 + \frac{o(1/n^4)}{1/n^4}\Big)$$

e in particolare per il teorema di permanenza del segno $a_n > 0$ per n abbastanza grande. Allora possiamo applicare il criterio del confronto asintotico e ricavare che la serie ha lo stesso carattere di

$$\sum n^\alpha \cdot \frac{1}{n^4} = \sum \frac{1}{n^{4-\alpha}} \ ,$$

che converge per $4 - \alpha > 1$ ovvero $\alpha < 3$, e diverge positivamente per $\alpha \geq 3$.
Dato che f è continua nel suo dominio (cioè per $x < 1/2$), per il teorema fondamentale del calcolo la funzione

$$G(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

è continua e derivabile per $x < 1/2$, con derivata $G'(x) = f(x)$, quindi anche la composizione

$$F(x) = G(x^2)$$

è continua e derivabile per $x^2 < 1/2$, ovvero $-1/\sqrt{2} < x < 1/\sqrt{2}$, con derivata

$$F'(x) = G'(x^2) \cdot 2x = 2xf(x^2) \; .$$

Essendo F continua e nulla per $x = 0$, il limite è nella forma $0/0$ e possiamo applicare il teorema di de l'Hôpital ottenendo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x^{10}} \underset{\substack{\uparrow \\ H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2xf(x^2)}{10x^9} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x \cdot [(71x^8/12) + o(x^8)]}{5x^9} = \frac{71}{60} \; .$$

PROBLEMA 4

Determinate tutte le primitive della funzione

$$\frac{e^{3x} - 2e^{2x} + 6e^x}{e^{2x} + 3e^x - 4} .$$

Determinate poi la primitiva che si annulla per $x = \log 2$.

La funzione è definita quando il denominatore non si annulla, cioè posto $e^x = t$ per

$$t^2 + 3t - 4 \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t \neq 1 \,, \; t \neq -4 \quad \Longleftrightarrow \quad e^x \neq 1$$

e cioè per $x \neq 0$. Dunque le primitive (che devono essere definite su un intervallo) sono definite o solo per $x < 0$ o solo per $x > 0$.
Con la sostituzione $e^x = t$, cui è associato il cambiamento dei differenziali $e^x\, dx = dt$, abbiamo

$$\int \frac{e^{3x} - 2e^{2x} + 6e^x}{e^{2x} + 3e^x - 4}\, dx = \int \frac{e^{2x} - 2e^x + 6}{e^{2x} + 3e^x - 4} e^x\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ e^x = t}}{=} \int \frac{t^2 - 2t + 6}{t^2 + 3t - 4}\, dt .$$

Ora

$$\frac{t^2 - 2t + 6}{t^2 + 3t - 4} = \frac{t^2 + 3t - 4 - 5t + 10}{t^2 + 3t - 4} = 1 - 5\frac{t - 2}{t^2 + 3t - 4} = 1 - 5\frac{t - 2}{(t + 4)(t - 1)} .$$

Inoltre

$$\frac{t - 2}{(t + 4)(t - 1)} = \frac{A}{t + 4} + \frac{B}{t - 1} = \frac{(A + B)t + 4B - A}{(t + 4)(t - 1)} \quad \Longleftrightarrow \quad A = \frac{6}{5} \,, \quad B = -\frac{1}{5}$$

per cui

$$\frac{t^2 - 2t + 6}{t^2 + 3t - 4} = 1 - \frac{6}{t + 4} + \frac{1}{t - 1}$$

così

$$\int \frac{t^2 - 2t + 6}{t^2 + 3t - 4}\, dt = t - 6\log|t + 4| + \log|t - 1| + c$$

e infine

$$\int \frac{e^{3x} - 2e^{2x} + 6e^x}{e^{2x} + 3e^x - 4}\, dx = e^x - 6\log(e^x + 4) + \log|e^x - 1| + c .$$

Dato che per $x = \log 2$ è $e^x - 6\log(e^x + 4) + \log|e^x - 1| = 2 - 6\log 6 \; (+0)$, e che $\log 2 > 0$, la primitiva che si annulla per $x = \log 2$ è definita per $x > 0$, dove $e^x > 1$, ed è

$$e^x - 6\log(e^x + 4) + \log(e^x - 1) - 2 + 6\log 6 .$$

Esercizio 1. Se z ha modulo 3 e parte reale doppia di quella immaginaria allora

(A) $z = \pm(6+3\mathrm{i})/\sqrt{5}$.

(B) $z = \pm(2+\mathrm{i})$.

(C) $z = 2 \pm \mathrm{i}$.

(D) $z = (6 \pm 3\mathrm{i})/\sqrt{5}$.

I numeri $\pm(2+\mathrm{i})$ e $2\pm\mathrm{i}$ hanno modulo $\sqrt{5}$ e non 3 , mentre dei due numeri $(6\pm 3\mathrm{i})/\sqrt{5}$ quello con il segno meno ha parte reale doppia dell'opposto della parte immaginaria, quindi la sola possibilità che rimane è $z = \pm(6+3\mathrm{i})/\sqrt{5}$, che effettivamente verifica le richieste. Volendo arrivarci direttamente, se $z = x + \mathrm{i}y$ le condizioni sono

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x = 2y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ 5y^2 = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \pm 3/\sqrt{5} \\ x = 2y \, . \end{cases}$$

Esercizio 2. Nella pentola vengono buttati a cuocere 30 fusilli, 50 penne e 20 maccheroni. Con la prima forchettata si infilzano tre pezzi. Qual è la probabilità che siano uno per tipo?

(A) $\dfrac{30 \cdot 50 \cdot 20 \cdot 6}{100 \cdot 99 \cdot 98}$.

(B) $\dfrac{30 \cdot 50 \cdot 20}{100!}$.

(C) $\dfrac{30 \cdot 50 \cdot 20}{100 \cdot 99 \cdot 98}$.

(D) $\binom{100}{30} \cdot \binom{70}{50}$.

La prima forchettata è un insieme di tre elementi scelti fra 100, quindi i casi possibili sono $\binom{100}{3}$. I casi favorevoli sono quelli in cui un elemento è un fusillo (30 possibilità diverse), un altro una penna (50 possibilità) e l'ultimo un maccherone (20), cioè sono $30 \cdot 50 \cdot 20$. La probabilità allora è

$$\frac{30 \cdot 50 \cdot 20}{\binom{100}{3}} = \frac{30 \cdot 50 \cdot 20}{(100 \cdot 99 \cdot 98)/6} = \frac{30 \cdot 50 \cdot 20 \cdot 6}{100 \cdot 99 \cdot 98} \, .$$

Esercizio 3. Quale delle seguenti funzioni ha massimo assoluto?

(A) $\log x - x$.

(B) $\log x + \operatorname{sen} x$.

(C) $\mathrm{e}^x - x$.

(D) $\mathrm{e}^x + x$.

Le tre funzioni B, C e D tendono a $+\infty$ per $x \to +\infty$ e le possiamo escludere. Vediamo invece che A è continua, e tende a $-\infty$ agli estremi dell' intervallo $]0, +\infty[$ in cui è definita, dunque ha massimo per un corollario del teorema di Weierstraß.

Esercizio 4. La successione $\dfrac{\sqrt{4n^2+3n} - 2n}{\mathrm{e}^{-1/n}}$ ha limite

(A) $3/4$.

(B) $4/3$.

(C) 0 .

(D) $-\infty$.

Il denominatore tende a 1, perciò per il teorema sul limite del quoziente

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{4n^2+3n}-2n}{\mathrm{e}^{-1/n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{4n^2+3n}-2n\right)$$

che, moltiplicando e dividendo per $\sqrt{4n^2+3n}+2n$, diviene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{\sqrt{4n^2+3n}+2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{4+(3/n)}+2} = \frac{3}{4}\ .$$

Esercizio 5. Data la disequazione $\sqrt{x^2-4} \le \sqrt{|x^2+2x+4|}$ e detto S l'insieme delle sue soluzioni,

(A) $]-4,-2[\subset S$.

(B) $2 \notin S$.

(C) S è limitato superiormente.

(D) S è un intervallo.

Sotto la radice al secondo membro c'è un valore assoluto, quindi non ci pone problemi di esistenza, mentre per l'esistenza della radice al primo membro dobbiamo richiedere che $x^2-4\ge 0$. Allora la disequazione equivale a

$$\begin{cases} x^2-4\ge 0 \\ x^2-4 \le |x^2+2x+4| = |x^2+2x+1+3| = |(x+1)^2+3|\ , \end{cases}$$

e cioè, dato che $(x+1)^2+3$ è sempre positivo e quindi $|(x+1)^2+3| = (x+1)^2+3$, a

$$\begin{cases} x^2-4\ge 0 \\ -8\le 2x \end{cases} \iff \begin{cases} x \in]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[\\ x\ge -4 \end{cases}$$

per cui $S = [-4,-2]\cup[2,+\infty[$.

Esercizio 6. Sia E l'insieme degli $\alpha>0$ per cui l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{2\alpha}\arctan(x^\alpha)}{(x^3+1)x^2}\,dx$ risulta convergente. Quale tra le seguenti affermazioni è vera?

(A) $]1,2[\subseteq E$.

(B) $4\in E$.

(C) $]0,+\infty[\subseteq E$.

(D) $E=\varnothing$.

Il numeratore e il denominatore sono positivi per $x>0$, quindi possiamo applicare tutti i criteri di convergenza per integrali di funzioni positive, e dobbiamo studiare la convergenza solo in zero e all'infinito. Per $x\to 0^+$ abbiamo $x^\alpha\to 0$, quindi

$$\frac{x^{2\alpha}\arctan(x^\alpha)}{x^{3\alpha}} \to 1\ , \qquad \frac{(x^3+1)x^2}{x^2}\to 1$$

e pertanto se f è la funzione integranda

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^{3\alpha-2}} = 1\ .$$

Per il criterio del confronto asintotico, vicino a zero l' integrale di f ha lo stesso carattere dell' integrale di $1/x^{2-3\alpha}$, che converge se e solo se $2-3\alpha<1$ ovvero $\alpha>1/3$. Invece per $x\to+\infty$

$$x^\alpha \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \arctan x^\alpha \to \pi/2 \quad \Rightarrow \quad x^{2\alpha}\arctan(x^\alpha) \sim x^{2\alpha}$$

mentre $(x^3+1)x^2 \sim x^5$, quindi $f(x) \sim 1/x^{5-2\alpha}$ il cui integrale vicino all' infinito converge per $5-2\alpha>1$ ovvero $\alpha<2$. In conclusione l' integrale converge in $E =]1/3, 2[$, che contiene $]1, 2[$.

Esercizio 7. Per quale tra le seguenti funzioni il punto $x_0 = 0$ **non è di minimo locale**?

(A) $f(x) = 2 - x^2 + x^3 - 9x$.

(B) $f(x) = 3 + x^3 + 2x^2$.

(C) $f(x) = -1 + x^6 + o(x^7)$.

(D) $f(x) = x^7 + x^4$.

Per la funzione A abbiamo $f'(0) = -9$, quindi 0 non può essere di minimo locale. Invece, se esaminiamo la parte principale delle altre funzioni, vediamo che B si comporta come $3+2x^2$, C come $-1+x^6$ e D come x^4 , tutte funzioni che hanno minimo locale in 0 .
