14 gennaio 2013 - Soluzioni preappello

Titolo nota 13/01/2013

Soluzione del 1° scritto (Quiz a risposta multipla)

(1) Sia $w = \dfrac{z^2 - \overline{z}^2}{(z+1)(\overline{z}-1)+1}$. Quando $z = 1 + \mathrm{i}$, quale tra le seguenti affermazioni è vera?

(A) $\Im w = 0$.

(B) Nessuna delle altre risposte è vera.

(C) $\Re w \leq 0$.

(D) $w = -1 - \mathrm{i}$.

$$\omega = \frac{(z-\overline{z})(z+\overline{z})}{|z|^2 - (z-\overline{z})} \Rightarrow \omega = \frac{2i\,\Im m z \cdot 2\,\Re e z}{|z|^2 - 2i\,\Im m z}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{4i}{2-2i} = \frac{2i}{1-i} \Rightarrow \omega = i(1+i) = -1+i$$

quindi la risposta corretta è la (C)

(2) Sia $f : [0,\, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$, $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$. Quale tra le seguenti affermazioni è vera?

(A) Nessuna delle altre risposte è vera.

(B) Esiste $x_0 \in]0,\, 1[$ tale che $f(x_0) > 1$.

(C) $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0,\, 1]$.

(D) $f(x)$ è debolmente crescente.

La risposta corretta è la (B): se (B) è falsa, allora $f(x) \leq 1$ $\forall x \in [0,1]$ allora $\int_0^1 f(x)dx < 1$ in quanto $f(0) = 1$!

(3) Sia A l'insieme delle soluzioni della disequazione $\sqrt{2x^2+1} < |x+1|$. Quale tra le seguenti affermazioni è vera?

(A) $\left[\frac{1}{2},\, \frac{3}{2}\right] \subset A$.

(B) $[-3,\, -1] \subset A$.

(C) A non è un intervallo.

(D) $-1/2 \in A$.

Essendo $|x+1| \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, la disequazione è equivalente a $2x^2+1 < x^2+2x+1$ ovvero a $x^2 - 2x < 0$ ovvero $A =]0,2[$.

Ne segue che la risposta corretta è la (A).

(4) Un bambino gioca con 3 pietre rosse, 4 verdi e 2 blu. In quanti modi le può allineare, conservando sempre una pietra verde in posizione centrale?

(A) $\frac{9!}{3!\cdot 4!\cdot 2!}$.

(B) $8!$.

(C) $\binom{8}{2}\binom{6}{4}$.

(D) $\binom{8}{3}\binom{5}{3}$.

Se una pietra verde sta sempre al centro, bisogna allineare 8 pietre di cui 3 rosse, 3 verdi e 2 blu. Visto che le permutazioni sono 8! (questo se fossero tutte $\neq$), il numero da noi cercato è

$$\frac{8!}{3!\,3!\,2!} = \binom{8}{3}\binom{5}{3}$$ ovvero la (D)

(5) Sia $f(x) = x - 3e^{-2x}$. Quale è il valore di $(f^{-1})'(-3)$?

(A) $-1/2$.

(B) Non esiste: f^{-1} non è derivabile in -2 .

(C) Nessuna delle altre risposte è vera.

(D) $1/5$.

$f(x) = 3$ se $x_0 = 0$. Inoltre $f'(x) = 1 + 6e^{-2x}$, ed essendo $f'(0) = 7 \neq 0$ si ha

$$(f^{-1})'(-3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3))} = \frac{1}{f'(0)} = 1/7,$$

e dunque la risposta corretta è la (C).

(6) Sia $a_n = \dfrac{2^n}{|\alpha - 6|^n + 2^n}$. Posto $A \subset \mathbb{R}$ l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui converge la serie numerica $\sum_n a_n$, quale tra le seguenti affermazioni è vera?

(A) $]2, 6[\subseteq A$.

(B) Nessuna delle altre risposte è vera.

(C) $]-\infty, 4[\cup]8, +\infty[= A$.

(D) $]5, 7[= A$.

$$a_n = \frac{1}{\left|\frac{\alpha}{2} - 3\right|^n + 1}$$. Se $\left|\frac{\alpha}{2} - 3\right| \leq 1$

allora $a_n \to 1$ allora la serie non converge.

Se invece $\left|\frac{\alpha}{2} - 3\right| > 1$, allora $a_n \sim \left(\frac{1}{\left|\frac{\alpha}{2} - 3\right|}\right)^n$,

e quest'ultimo è il termine generale d'una serie convergente. Dunque $A = \{\alpha : \left|\frac{\alpha}{2} - 3\right| > 1\}$

$\Rightarrow A = \{\alpha : \alpha - 6 > 2 \text{ o } 6 - \alpha > 2\} \Rightarrow A =]-\infty, 4[\cup]8, +\infty[$

e quindi la risposta corretta è la (C)

(7) Siano date $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che $-3 < a_n \cdot b_n < 5$. Quale tra le seguenti affermazioni è vera?

(A) Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = -3$, allora $\lim_{n\to+\infty} b_n = 5$.

(B) Se $\{a_n\}$ è debolmente crescente, allora $\{b_n\}$ è strettamente decrescente.

(C) Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$, allora $\{b_n\}$ è limitata.

(D) Se $a_n > 0$ per ogni n, allora $b_n \leq 0$ per ogni n.

Per sgombrare alcuni dubbi, si osservi che $a_n = 1/n$ e $b_n = n$ soddisfano $-3 < a_n \cdot b_n < 5$. Quindi la (A) è falsa, come pure la (B): si prendano $a_n = 1 - 1/n$ e $b_n = 2 - 1/n$.

Anche la (D) è falsa: $a_n = 1/n$ e $b_n = n$ non la soddisfano. Resta la (C): questa è vera poiché se $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = 1$, allora $1-\varepsilon < a_n < 1+\varepsilon$ da cui, dovendo essere $-3 \leq a_n \cdot b_n \leq 5$, segue

$-3(1+\varepsilon) < (1-\varepsilon) b_n \leq (1+\varepsilon) b_n < 5(1+\varepsilon) \Rightarrow \{b_n\}$ limitata (se $b_n \geq 0$)

$3(1+\varepsilon) < (1+\varepsilon) b_n \leq (1-\varepsilon) b_n < 5(1+\varepsilon) \Rightarrow \{b_n\}$ limitata (se $b_n \leq 0$)

La risposta corretta è dunque la (C)

Soluzione della seconda prova scritta

1) Sia dato il polinomio $P(z) = z^4 - 3z^3 + 2z^2 + 2z - 4$.
   a) Calcolate $P(1+\mathrm{i})$.
   b) Calcolate tutte le radici in $\mathbb{C}$ dell'equazione $P(z) = 0$.

Risposta:

$$P(1+i) = (1+i)^4 - 3(1+i)^3 + 2(1+i)^2 + 2 + 2i - 4$$

$$= 1 + \cancel{4i} - 6 - \cancel{4i} + 1 - 3(1+3i-3-i) + 2(2i) + 2i - 2$$

$$= -4 - 3(2i-2) + 6i - 2$$

$$= -4 + 6 - 2 - 6i + 6i = 0$$

dunque $z_1 = 1+i$ è radice di $P(z)=0$. Ma il polinomio è a coefficienti reali, e dunque $z_2 = 1-i = \bar{z}_1$ è radice dell'eq. $P(z)=0$.
Ne segue che $d(z) = (z-z_1)(z-z_2) = z^2 - 2z + 2$ divide $P(z)$

$$\begin{array}{l|l}
z^4 - 3z^3 + 2z^2 + 2z - 4 & z^2 - 2z + 2 \\
\cline{2-2}
z^4 - 2z^3 + 2z^2 & z^2 - z - 2 \\
\cline{1-1}
\quad -z^3 \qquad\quad + 2z - 4 & \\
\quad -z^3 + 2z^2 - 2z & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad -2z^2 + 4z - 4 &
\end{array}$$

Dunque $P(z) = (z^2 - z - 2)(z^2 - 2z + 2)$, da cui segue $z_3 = 2$ e $z_4 = -1$, essendo soluzioni di $z^2 - z - 2 = (z-2)(z+1)$, sono anche soluzioni di $P(z)=0$

Insieme $z_1 = (1+i)$, $z_2 = (1-i)$, $z_3 = 2$, $z_4 = -1$.

2) Sia $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{x+1}\right)$.

a) Determinate per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie $\sum_n |g(n)|^\alpha$.

b) Determinate per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie $\sum_n \left(g(n) - \frac{1}{n^\alpha}\right)$.

Risposta:

Quando $n \to +\infty$, $1/n \to 0$ e dunque

$$g(n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{6}\frac{1}{n^3} - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{6}\frac{1}{(n+1)^3}\right) + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2} \quad \text{per } n \to \infty$$

da cui segue $|g(n)|^\alpha \sim \frac{1}{n^{2\alpha}}$ quando $n \to \infty$

da cui segue, per il Teorema del confronto asintotico, che $\sum_n |g(n)|^\alpha$ converge se $2\alpha > 1$ sse $\alpha > \frac{1}{2}$

posto $a_n = g(n) - 1/n^\alpha \sim \begin{cases} -1/n^\alpha & \text{se } \alpha < 1 \\ -\frac{1}{n+1} & \text{se } \alpha = 1 \\ -\frac{1}{n^\alpha} & \text{se } 1 < \alpha < 2 \\ \frac{1}{n(n+1)} & \text{se } 2 \leq \alpha \end{cases}$

da cui segue che $\sum_n a_n$ converge sse $1 < \alpha$

3) (i)Calcolate il seguente limite:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{3e^{\sin(x^2)} - 3e^{\sin^2(x)}}{x^2 - x\sin x}\,.$$

(ii)Calcolate, al variare di $\alpha > 0$, il seguente limite:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{3e^{\sin(x^2)} - 3e^{\sin^2(x)} - x^\alpha}{x^2 - x\sin x}\,.$$

Risposta:

$$3e^{\sin(x^2)} = 3 + 3x^2 + \frac{3}{2}x^4 + o(x^7)$$

$$3e^{\sin^2(x)} = 3 + 3x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{11}{30}x^6 + o(x^7)$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{3e^{\sin(x^2)} - 3e^{\sin^2(x)}}{x^2 - x\sin(x)} = \lim_{x\to0^+} \frac{x^4 + o(x^7)}{\frac{1}{6}x^4 + o(x^5)} = 6$$

analogamente

$$\lim_{x\to0^+} \frac{3e^{\sin(x^2)} - 3e^{\sin^2(x)} - x^\alpha}{\frac{1}{6}x^4 + o(x^5)} =$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{x^4 + \frac{11}{30}x^6 - x^\alpha + o(x^7)}{\frac{x^4}{6} + o(x^5)} = \begin{cases} -\infty & \text{se } \alpha < 4 \\ 0 & \text{se } \alpha = 4 \\ \frac{1}{6} & \text{se } \alpha > 4 \end{cases}$$

4) Sia data

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \log\left|\frac{x}{x+1}\right| \ ;$$

calcolatene il dominio, i limiti agli estremi del dominio, gli eventuali asintoti, le regioni di monotonia, i massimi ed i minimi locali ed infine le regioni di concavità e di convessità. Tracciate un grafico approssimativo della funzione f .
Calcolate, se esiste, il seguente integrale

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \ .$$

Risposta:

f è definita su $\mathbb{R} \setminus \{0,-1\}$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-1} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$ (il limite per $x\to\pm\infty$ di $\frac{x}{x+1}$ è 1 da cui segue $\log\left|\frac{x}{x+1}\right| \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$)

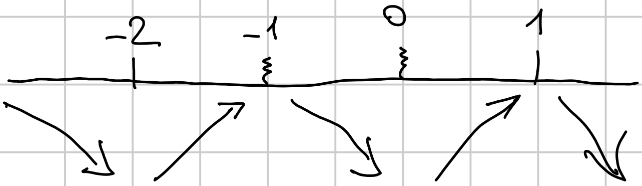
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{2} \quad e \quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)+\frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \log\left|\frac{x}{x+1}\right| = 0$$

$\Rightarrow$ $r(x) = -\frac{x}{2}$ è asintoto obliquo per $x\to\pm\infty$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\left|\frac{x}{x+1}\right|}\,\frac{\frac{x}{x+1}}{\left|\frac{x}{x+1}\right|}\cdot\frac{x+1-x}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{\cancel{x+1}}{x}\cdot\frac{1}{(x+1)^{\cancel{2}\,1}} = \frac{-x^2-x+2}{2x(x+1)}$$

$f'(x) = 0$ se $x^2+x-2=0$ se $(x+2)(x-1)=0$
se $x=-2$, $x=1$



$f(-2) = 1 + \log\left|\frac{-2}{-1}\right| > 0$
= minimo locale

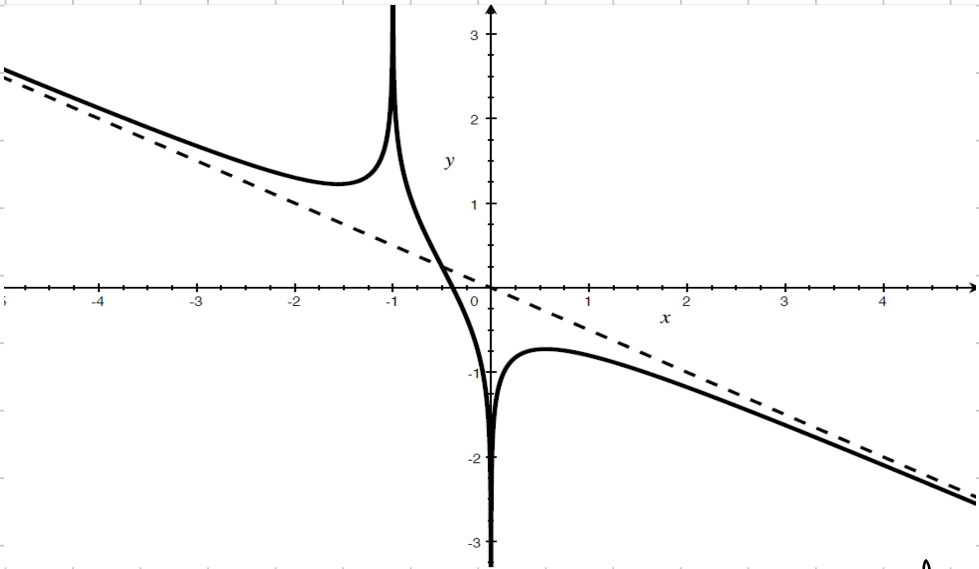
$f(1) = -\frac{1}{2} + \log\frac{1}{2} < 0$
= max locale

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x(x+1)}\right)' = -\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} = 0 \ \text{se} \ x = -\tfrac{1}{2}$$

e dunque $f(x)$ è $\begin{cases} \text{convessa se } x < -\frac{1}{2} \\ \text{concava se } x > -\frac{1}{2} \end{cases}$

e il punto $x_0 = -\frac{1}{2}$ è un flesso "discendente"

(la Tangente ha coefficiente angolare <0)



$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ è improprio: $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} + \log(-x) - \log(x+1) & \text{se } -1<x<0 \\ -\frac{x}{2} + \log x - \log(x+1) & \text{se } 0<x<1 \end{cases}$

dunque $\int_{-1}^{0} f\,dx = \int_{-1}^{0}\left[-\frac{x}{2} + \log(-x) - \log(x+1)\right]dx$

$= \left[-(x+1)\log(x+1) + x\log(-x) - \frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{0} = 1/4$

$\int_{0}^{1} f\,dx = \int_{0}^{1}\left[-\frac{x}{2} + \log(x) - \log(x+1)\right]dx$

$= \left[-(x+1)\log(x+1) + x\log x - \frac{x^2}{4}\right]_{0}^{1} = -\frac{1}{4} - 2\log 2$

$\int_{-1}^{1} f\,dx = -2\log 2$