Scritto di Analisi Matematica 1 del 24/09/2012

Correzione 1ª parte

(1) Gli $\alpha > 0$ per i quali converge $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}^2 x + \arctan x^3}{(\sqrt[3]{x+2})^{2\alpha} x^{3\alpha}}\, dx$ sono

(A) $1 < \alpha < 2$.

(B) $3/11 < \alpha < 1$.

(C) $\alpha > 12/11$.

(D) nessun valore di α.

L'integrando è ≥ 0, quindi l'integrale può convergere o divergere a $+\infty$

La funzione integranda è definita su $]0,+\infty[$ $\forall \alpha > 0$ e si ha

$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx < +\infty \quad \underline{\text{sse}} \quad \int_0^1 f_\alpha(x)\,dx < +\infty \ \text{e} \ \int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx < +\infty$$

- $$f_\alpha(x) = \frac{\text{sen}^2 x + \text{arctg}\, x^3}{(x+2)^{\frac{2\alpha}{3}} \cdot x^{3\alpha}} \sim \frac{x^2}{x^{3\alpha}} = \frac{1}{x^{3\alpha-2}} \quad (x \to 0)$$

Per il criterio del confronto asintotico

$$\int_0^1 f_\alpha(x)\,dx < +\infty \ \underline{\text{sse}} \ \int_0^1 x^{2-3\alpha}\,dx < +\infty \ \underline{\text{sse}} \ 1+2-3\alpha > 0$$

$$\underline{\text{sse}} \ \boxed{\alpha < 1}$$

- $$f_\alpha(x) = \frac{\text{sen}^2 x + \text{arctg}\, x^3}{(x+2)^{\frac{2\alpha}{3}} \cdot x^{3\alpha}} \sim \frac{\frac{\pi}{2} + \text{sen}^2 x}{x^{\frac{11}{3}\alpha}} \quad x \to +\infty$$

Per il criterio del confronto

$$\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx < +\infty \ \underline{\text{sse}} \ \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{11}{3}\alpha}} < +\infty \ \underline{\text{sse}} \ \frac{11}{3}\alpha > 1 \ \underline{\text{sse}} \ \boxed{\alpha > \frac{3}{11}}$$

La risposta corretta è la (B).

(2) La serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+\operatorname{sen}^3 n}{n^{3\alpha+1}+(\sqrt{n})^{\alpha+1}}$ converge

(A) per $\alpha > 2/3$.

(B) per $1/5 < \alpha < 2/3$.

(C) per $\alpha < 1/5$.

(D) per $\alpha < 2/3$ e per $\alpha > 5$.

$a_n \geq 0 \ \forall n$, ovvero è una serie a termini positivi

$$a_n = \frac{n^2+\operatorname{sen}^3 n}{n^{3\alpha+1}+n^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}}} \sim \frac{1}{n^{3\alpha-1}+n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{2}}} \sim \frac{1}{n^\beta}$$

dove $\beta = \max\left\{3\alpha-1, \frac{\alpha}{2}-\frac{3}{2}\right\} = \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha-3) & \alpha < -\frac{1}{5} \\ 3\alpha-1 & -\frac{1}{5} \leq \alpha \end{cases}$

Per il criterio del confronto asintotico

$\sum_n a_n < +\infty$ $\underline{\text{sse}}$ $\sum_n \frac{1}{n^\beta} < +\infty$ sse $\beta > 1$

sse $3\alpha - 1 > 1$

sse $\alpha > 2/3$

La risposta corretta è la (A)

(3) Sia $I = \int_1^2 x^2 e^{x^3}\, dx$. Allora

(A) $I = (6e^6 - e)/3$.

(B) $I = (e^8 - e)/3$.

(C) $I = (e^6 - e)/3$.

(D) $I = (8e^8 - e)/3$.

$$\int_1^2 x^2 e^{x^3} dx = \left[\frac{e^{x^3}}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{3}\left(e^8 - e\right)$$

La risposta corretta è la (B)

(4) Se S è l'insieme delle soluzioni della disequazione $\log(x^2-4) < \log(2+x)$, allora

(A) $]-\infty, 3[\subset S$.

(B) $]2,3[= S$.

(C) $]-2,3[= S$.

(D) $]2,+\infty[\subset S$.

Ricerca del segno di $f(x) = \log(2+x) - \log(x^2-4)$

f è definita in $]-2,+\infty[\cap (]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[)$

$=]2,+\infty[= D$

$f(x) > 0$, $x \in D$ $\underline{\text{se}}$ $x \in D$ $2+x > x^2-4$

$\underline{\text{se}}$ $x \in D$ $x^2-x-6<0$ $(x-3)(x+2)$

$\underline{\text{se}}$ $x \in D$ $(x-3)(x+2)<0$

$\underline{\text{se}}$ $x \in]2,+\infty[\cap]-2,3[$ $\underline{\text{se}}$ $x \in]2,3[$

La risposta corretta è la (B)

(5) Il limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(e^{4x} + \operatorname{sen}(3x))}{2x\cos(5x)}$ vale

(A) 0 .

(B) 7/2 .

(C) 2 .

(D) 3/2 .

$$\frac{\log(e^{4x} + \operatorname{sen}(3x))}{2x\cos(5x)} = \frac{\log(1+4x+3x+o(x))}{2x(1+o(x))}$$

$$= \frac{7x+o(x)}{2x+o(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{7}{2}$$

La risposta corretta è la (B)

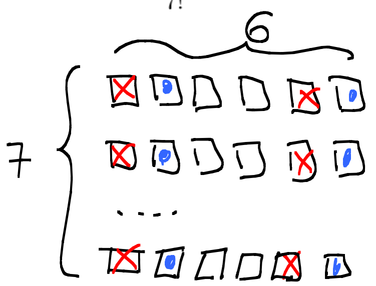
(6) Un'aula ha 7 file di 6 posti ciascuna. Due amici vengono messi a sedere a caso; qual è la probabilità che siedano uno di fianco all'altro?

(A) $\dfrac{1}{\binom{7}{2}\binom{6}{2}}$.

(B) $\dfrac{6}{7!}$.

(C) $\dfrac{35}{\binom{42}{2}}$.

(D) $\dfrac{1}{42}$.



Il numero delle possibili coppie (non ordinate: voglio i due seduti accanto, non importa l'ordine) da un insieme di 42 el.ti è

$$\binom{42}{2} = \text{Casi Possibili}$$

Se si vuole mettere la coppia affiancata, si hanno a disposizione 35 scelte

La risposta corretta è la (C).

(7) Sia $w = \dfrac{\mathrm{i}\bar{z}^2 - \mathrm{i}|z|^2}{3\mathrm{i}z + 2\bar{z}}$. Se $z = 2 + \mathrm{i}$, quale tra le seguenti affermazioni è **falsa**?

(A) $\Im w < -1$.

(B) $\Re w < 0$.

(C) $\Re w > \Im w$.

(D) $\Im w > 1$.

$$w = \frac{i(2-i)^2 - i(2-i)(2+i)}{3i(2+i)+2(2-i)} = \frac{i(4-1-4i)-5i}{6i-3+4-2i}$$

$$= \frac{(4-2i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)} = \frac{4-16i-2i-8}{17}$$

$$= -\frac{4}{17} - \frac{18}{17}i$$

La risposta corretta è la (D).

Correzione Seconda Parte

1) Determinate le soluzioni (z,w), con $z,w \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} 3iz + 2w = 1 \\ z\bar{w} - 3i = zw + 6 \, . \end{cases}$$

$$z = \frac{1}{3i} - \frac{2w}{3i} = -\frac{i}{3} + i \cdot \frac{2}{3} w$$

$$\begin{cases} z = -\frac{i}{3}(1-2w) \\ z(w - \bar{w}) + 6 = -3i \end{cases} \qquad \begin{cases} z = -\frac{i}{3}(1-2w) \\ -\frac{i}{3}(1-2w) \cdot 2i \, \mathrm{Im}\, w + 6 = -3i \end{cases}$$

Risolviamo la seconda eq. $w = x+iy$

$$\frac{2}{3} y (1 - 2x - 2iy) + 6 = -3i$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3} y - \frac{4}{3} xy + 6 = 0 \\ -\frac{4}{3} y^2 = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 - 2x + 6 = 0 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \quad w_1 = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} i$$

$$\begin{cases} -1 + 2x + 6 = 0 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad w_2 = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2} i$$

$$w_1 = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} i \longrightarrow z_1 = -\frac{i}{3}\left(1 - 2\left(\frac{7}{2} + \frac{3}{2} i\right)\right) = -\frac{i}{3} + \frac{7}{3} i - 1 = -1 + 2i$$

$$w_2 = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2} i \longrightarrow z_2 = -\frac{i}{3}\left(1 - 2\left(-\frac{5}{2} - \frac{3}{2} i\right)\right) = -\frac{i}{3} + \frac{2}{3} i \left(-\frac{5}{2} - \frac{3}{2} i\right) = -\frac{i}{3} - \frac{5}{3} i + 1 = 1 - 2i$$

2) Sia $g(x) = e^x - \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)$. Determinate per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_n \left[g\left(\frac{1}{n}\right)\right]^\alpha .$$

Determinate per quali $\beta \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_n \left[g\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right]^\beta .$$

Si utilizza il criterio del confronto asintotico

$$g(x) = \cancel{1} + x + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{6} - \cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + o(x^3)$$

$$= x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad (x \to 0)$$

$$a_n = \left[g\left(\frac{1}{n}\right)\right]^\alpha = \frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \sim \frac{1}{n^\alpha} \qquad n \to +\infty$$

Thm confronto asintotico

$\sum_n a_n$ converge $\underline{\text{sse}}$ $\sum_n 1/n^\alpha$ converge

$\underline{\text{sse}}$ $\alpha > 1$

$$b_n = \left[g\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right]^\beta = \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]^\beta$$

$$= \frac{1}{n^{3\beta}} + o\left(\frac{1}{n^{3\beta}}\right)$$

Thm confronto asintotico

$\sum_n b_n$ converge $\underline{\text{sse}}$ $\sum_n 1/n^{3\beta}$ converge

$\underline{\text{sse}}$ $3\beta > 1$

$\underline{\text{sse}}$ $\beta > 1/3$

3) Calcolate il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x-\cos x)(e^x-1)+\log(1+x)}{x-\arctan x}.$$

(Solo Analisi 1) Calcolate, al variare di $\alpha > 0$, il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(x^\alpha-\cos x)(e^x-1)+\log(1+x)}{(x-\arctan x)^\alpha}.$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3) \qquad \log(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$e^x-1 = x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

$$g_\alpha(x) = (x-\operatorname{arctg} x)^\alpha = \left[\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right]^\alpha = \frac{x^{3\alpha}}{3^\alpha}+o(x^{3\alpha})$$

$$f_\alpha(x) = (x^\alpha-\cos x)(e^x-1)+\log(1+x) =$$

$$= \left(x^\alpha-1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)$$

$$+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$= \cancel{-x}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^3}{2}+x^{\alpha+1}+\frac{x^{\alpha+2}}{2}+o(x^{\alpha+2})$$

$$+\cancel{x}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3) \qquad \frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{4}{6} \quad 2$$

$$= -x^2+\frac{2}{3}x^3+x^{\alpha+1}+\frac{x^{\alpha+2}}{2}+o(x^3)+o(x^{\alpha+2})$$

$$\alpha=1 \quad f(x) = \frac{7}{6}x^3+o(x^3)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{7}{6}x^3+o(x^3)}{\frac{x^3}{3}+o(x^3)} = \frac{7}{2}$$

$$\alpha>1 \quad f_\alpha(x) = -x^2+o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2+o(x^2)}{\frac{x^{3\alpha}}{3^\alpha}+o(x^{3\alpha})} = -\infty$$

$\alpha < 1 \qquad f_\alpha(x) = x^{1+\alpha} + o(x^{1+\alpha})$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{1+\alpha} + o(x^{1+\alpha})}{\frac{x^{3\alpha}}{3^\alpha} + o(x^{3\alpha})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3^\alpha}{x^{2\alpha-1}}$$

$$= \begin{cases} +\infty & 1/2 < \alpha < 1 \\ \sqrt{3} & 1/2 = \alpha \\ 0 & 0 < \alpha < 1/2 \end{cases}$$

4) Sia
$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right).$$
Calcolatene il dominio, i limiti agli estremi del dominio, gli asintoti, il segno e le regioni di monotonia. Con queste informazioni, tracciate il grafico della funzione f.
(Solo Analisi 1) Determinate al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$ e dite per quali $k \in \mathbb{R}$ il dominio della funzione $\dfrac{1}{f(x)-k}$ è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Dominio Max $\equiv \mathbb{R} \setminus \{0\}$

La funzione è dispari
$$\begin{cases} f(-x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{(-x)}{2} + \frac{1}{2(-x)}\right) \\ = \operatorname{arctg}\left(-\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)\right) \\ = -f(x) \end{cases}$$

$f(x) > 0$ se $\frac{x}{2} + \frac{1}{2x} = \frac{x^2+1}{2x} > 0$ se $x > 0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2} = -\lim_{x\to 0^-} f(x)$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} = -\lim_{x\to -\infty} f(x)$

$y = \pm\frac{\pi}{2}$ sono asintoti orizzontali

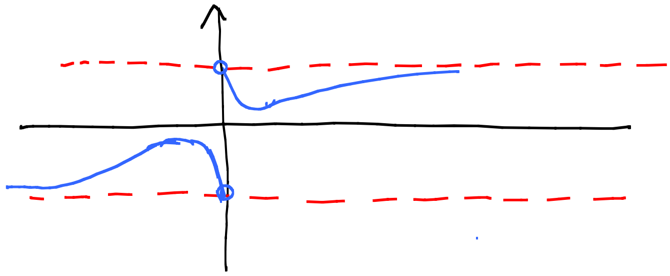
$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{2}\right)} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2}\right)$$

$$= \frac{4\cancel{x^2}}{x^4 + 6x^2 + 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{2\cancel{x^2}} = 2\frac{x^2-1}{x^4+6x^2+1}$$

$f' > 0$ se $|x| > 1$ $\qquad f'(x) < 0$ se $\begin{cases} |x| < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$

$x_1 = -1$ p.to max relativo $\quad f(-1) = -\pi/4$

$x_2 = 1$ " min " $\quad f(1) = \pi/4$



$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -2$$

$|k| \geq \frac{\pi}{2} \qquad f(x) = k \quad \phi$ soluzioni

$\pi/4 < |k| < \pi/2 \qquad f(x) = k \quad 2$ soluzioni

$|k| = \pi/4 \qquad f(x) = k \quad 1$ soluzione

$|k| < \pi/4 \qquad f(x) = k \quad \phi$ soluzioni

$g(x) = \dfrac{1}{f(x) - k}$ Il dominio max di $g \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Preso $k = \pi/4$, $f(1) = \pi/4$ e dunque

Dominio max $\dfrac{1}{f(x) - \frac{\pi}{4}} = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

Se si vede che $g(x) = \dfrac{1}{f(x) - k}$ sia def.

su tutto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora è necessario

che $f(x) - k \neq 0 \quad \forall x \neq 0$ ovvero

$|k| < \pi/4$ oppure $|k| \geq \pi/2 \qquad \square$