Esercitazione del 29 maggio 2008

Esercizio1

Determinate il valore del seguente integrale doppio

$$\int_{\Omega} f(x,y)\, dxdy$$

dove $f(x,y) = x$, *ed* Ω *è l'insieme delimitato dalle curve*

- $y = \mathrm{e}^x$
- $y = \frac{(\mathrm{e}^2-1)(x-1)}{2\mathrm{e}} + \mathrm{e}.$

Esercizio2

Dati gli insiemi

- $A = \{(x, y) \in R^2 \ : \ -1 \leq x \leq 1, \ -1 \leq y \leq 1\}$
- $B = \{(x, y) \in R^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ x \geq 0\},$

sia (x_Ω, y_Ω) *il baricentro geometrico di* $\Omega = A \setminus B$.

(i) $(x_\Omega, y_\Omega) = \left(\frac{2}{3\pi}, 0\right)$.

(ii) $(x_\Omega, y_\Omega) = \left(\frac{-4}{3(8-\pi)}, 0\right)$.

(iii) $(x_\Omega, y_\Omega) \in A \cap B$.

(iv) *nessuna delle altre risposte è vera.*

Esercizio3

Dato l'insieme $E = \{(x, y) \in R^2 \ : \ \frac{y^2}{4} \leq x \leq \frac{y}{2}\}$, *l'integrale* $\int_E (y - y^3)\, dxdy$

(i) *è uguale a* 0.

(ii) *è uguale a* $\frac{2}{5}$.

(iii) *è uguale a* $-\frac{1}{5}$.

(iv) *non esiste poiché* E *è illimitato.*

Esercizio4

Dato l'insieme $\Omega = \{(x, y, z) \in R^3 \ : \ 0 \leq 4z \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$, *calcolate*

$$\int_\Omega (x + y + z)\, dxdydz.$$

Esercizio5

Calcolate, utilizzando il teorema del cambiamento di variabili, il seguente integrale

$$\int_{\Omega} \frac{2y^2}{\mathrm{e}^x} \cos\left(y\mathrm{e}^x\right) dxdy$$

dove $\Omega = \{(x, y) \in R^2 \ : \ \mathrm{e}^x \leq y \leq 2\mathrm{e}^x, \ \frac{\pi}{2} \leq y\mathrm{e}^x \leq \pi\}$

Soluzioni

Soluzione Esercizio1

- *Il dominio Ω è normale rispetto all'asse x (anche rispetto all'asse y) e quindi lo si può esprimere come*

$$\Omega = \{(x, y) \in R^2 \ : \ -1 \leq x \leq 1, \ \mathrm{e}^x \leq y \leq \frac{(\mathrm{e}^2 - 1)(x - 1)}{2\mathrm{e}} x + \mathrm{e}\}$$

- $\displaystyle\int_\Omega x \, dxdy = \frac{\mathrm{e}^2 - 7}{3\mathrm{e}}.$

Soluzioni

Soluzione Esercizio2

La risposta corretta è la (ii), infatti:

- *Il baricentro di A si trova in* $(x_A, y_A) = (0, 0)$
- *Il baricentro di B si trova in* $(x_B, y_B) = (4/3\pi,\ 0)$
- *il baricentro di* $\Omega = A \setminus B$ *si trova in*

$$\begin{cases} x_\Omega = \dfrac{m(A)x_A - m(B)x_B}{m(A) - m(B)} = \dfrac{-4}{3(8-\pi)}, \\ y_\Omega = \dfrac{m(A)y_A - m(B)y_B}{m(A) - m(B)} = 0, \end{cases}$$

Soluzioni

Soluzione Esercizio3

La risposta corretta è la (iii), ovvero $-1/5$.
Si può osservare, senza fare calcoli, che l'insieme E *è limitato e la funzione* $y - y^3$ *è negativa su* E*: questo ci permette di concludere che l'unica risposta plausibile è la (iii).*

Soluzioni

Soluzione Esercizio4

- $\Omega = \{(x, y, z) \in R^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq 4, \ 0 \leq z \leq \frac{x^2+y^2}{4}\}$, *e quindi integrando per fili si ottiene*

$$\int_\Omega (x + y + z)\, dxdydz = \int_B dxdy \left(\int_0^{\frac{x^2+y^2}{4}} z\, dz \right) = \ldots = \frac{2\pi}{3}$$

dove $B = \{(x, y) \in R^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 4\}$.

- *Si osservi che il baricentro di* Ω *giace sull'asse z (è asse di simmetria per l'insieme* Ω*). Ne segue che* $x_\Omega = y_\Omega = 0$ *(le prime due coordinate del baricentro geometrico sono nulle) e dunque possiamo concludere che* $\int_\Omega x\, dxdydz = \int_\Omega y\, dxdydz = 0$

Soluzioni

Soluzione Esercizio5

La corretta trasformazione è $(u,v) = (ye^{-x}, ye^{x})$, *ovvero*

$$(u,v) \to \left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{v}{u}\right),\ \sqrt{uv}\right).$$

Con qualche calcolo si ottiene che

$$|\det J_\Phi(u,v)| = \left|-\frac{1}{2\sqrt{uv}}\right|, \qquad \Phi^{-1}(\Omega) = [1,2]\times\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$$

e quindi

$$\int_\Omega \frac{2y^2}{e^x}\cos(ye^x)\,dxdy = \int_{\Phi^{-1}(\Omega)} (2\sqrt{uv})\cdot u\cos(v)\cdot\frac{1}{2\sqrt{uv}}dudv.$$

Essendo $\Phi^{-1}(\Omega)$ *un rettangolo, si ha*

$$\int_1^2 du\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} u\cos(v)dv\right) = -\frac{3}{2}$$