Esercitazione del 24 aprile 2008

Esercizio 0.1 *Considerate la funzione* $f(x,y) = x^2 - 2xy^3 + 3y^2 + 1$.

a) *Determinate gli eventuali punti stazionari di* f *in* $\mathbb{R}^2$ *e studiatene la natura.*

b) *Dopo averne giustificato l'esistenza, determinate il massimo e il minimo assoluti di* f *sul quadrato* T *di vertici* $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ *e* $(0,1)$.

Esercizio 0.2 *Considerate la funzione*

$$f(x,y) = (x^2 - 2y^2)e^{x-y}.$$

a) *Determinate i punti stazionari di* f *studiandone la natura.*

b)

$$\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} f(x,y) = +\infty.$$

(vero o falso?)

c) *La funzione è limitata inferiormente. (vero o falso?)*

Esercizio 0.3 *Considerate la funzione*

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y + 1.$$

a) *Determinate i punti stazionari di* f *studiandone la natura.*

b) *Determinate il massimo* M *ed il minimo* m *di* f *sull'insieme*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \geq y \geq -\sqrt{4 - x^2}\}$$

c) *Se il punto* P_M (P_m) *di massimo (minimo) di* f *su* A *cade su* ∂A *e se in questo punto la frontiera ammette una parametrizzazione regolare* $\varphi(t)$, *cosa si può dire del prodotto scalare* $\langle \nabla f(P_M), \varphi'(t_M) \rangle$ *dove* $\varphi(t_M) = P_M$ *(ovvero del prodotto* $\langle \nabla f(Pm), \varphi'(t_m) \rangle$ *dove* $\varphi(t_m) = P_m$*)?*

Esercizio 0.4 *Considerate la funzione*

$$f(x,y) = y - x^2.$$

a) *Determinate il massimo* M *ed il minimo* m *di* f *sull'insieme*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| \leq |y| \leq 2\}$$

b) *Se il punto* P_M (P_m) *di massimo (minimo) di* f *su* A *cade su* ∂A *e se in questo punto la frontiera ammette una parametrizzazione regolare* $\varphi(t)$, *cosa si può dire del prodotto scalare* $\langle \nabla f(P_M), \varphi'(t_M) \rangle$ *dove* $\varphi(t_M) = P_M$ *(ovvero del prodotto* $\langle \nabla f(Pm), \varphi'(t_m) \rangle$ *dove* $\varphi(t_m) = P_m$*)?*

Soluzioni

Soluzione 0.1

(i) $\nabla f_(x, y) = \big(2x - 2y^3, -6xy^2 + 6y\big)$, $(x, y) \in I\!R^2$; La matrice hessiana è data da

$$\begin{pmatrix} 2 & -6y^2 \\ -6y^2 & 6 - 12xy \end{pmatrix}.$$

I punti stazionari sono dunque $A = (0, 0)$ (punto di minimo locale), $B = (1, 1)$ e $C = (-1 - 1)$ (punti di sella)

(ii) $\max_{(x,y)\in A} f = \max_{(x,y)\in\partial A} f = f(0, 1) = 4 \min_{(x,y)\in A} f = \min_{(x,y)\in\partial A} f = f(0, 0) = 0$.

Soluzione 0.2

a) $(0, 0)$ (punto di sella) e $(-4, -2)$ (punto di massimo relativo interno).

b) Falso. Infatti, presa $\varphi(t) = (0, t)$, si ha che
$\lim_{t\to+\infty} f(\varphi(t)) = 0$,
mentre
$\lim_{t\to-\infty} f(\varphi(t)) = -\infty$.

c) Falso. Posto $\gamma(t) = (t, 0)$, si ha che
$\lim_{t\to+\infty} f(\gamma(t)) = +\infty$, e quindi (si veda il punto b)!) la funzione è illimitata sia superiormente che inferiormente.

Soluzione 0.3

(i) L'unico punto stazionario è $(0, 1)$, che è un minimo relativo interno, infatti

$$H_f(0, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Essendo poi $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2 \geq f(0, 1) = 0$, questo è pure punto di minimo assoluto della funzione su $I\!R^2$.

(ii) Si osservi che il punto $(0, 1) \notin A$. La frontiera $\partial A = C_1 \cup C_2$ è unione di due curve regolari di parametrizzazione

$$\begin{aligned} C_1 &= \{\varphi(t) = (-t, 0) \ : \ t \in [-2, 2]\} \\ C_2 &= \{\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t) \ : \ t \in [\pi, 2\pi]\}. \end{aligned}$$

Studiando $g(t) = f(\varphi(t)) = t^2 + 1$ quando $t \in [-2, 2]$, si trova $t = 0$, punto di minimo per g su $[-2, 2]$, ovvero $(0, 0) = \varphi(0)$.
Studiando successivamente $h(t) = f(\gamma(t)) = 5 - 4\sin t$ al variare di $t \in [\pi, 2\pi]$, si trova $t = 3\pi/2$ punto di massimo per h su $[\pi, 2\pi]$, ovvero $\gamma(3\pi/2) = (0, -2)$. E dunque

$$\begin{aligned} m &= \min_A f = \min_{\partial A} f = f(0, 0) = 1 \\ M &= \max_A f = \max_{\partial A} f = f(0, -2) = 9. \end{aligned}$$

Si osservi che in questo caso lo studio attraverso gli insiemi di livello era assai più rapido.

(iii) I prodotti scalari sono nulli, ovvero

$$\begin{aligned}\langle \nabla f(0,0), \varphi'(0)\rangle &= 0\\ \langle \nabla f(0,-2), \gamma'(3\pi/2)\rangle &= 0.\end{aligned}$$

Soluzione 0.4

(i) $\nabla f(x,y) = (1,-2x) \neq (0,0)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, e quindi non esistono punti stazionari interni all'insieme A

(ii) Il massimo di f è raggiunto in $(0,2)$, e si ha

$$M = f(0,2) = 2 = \max_{\partial A} f = \max_{A} f,$$

mentre il minimo è raggiunto in $(-2,-2)$ e $(-2,2)$, e si trova

$$m = f(-2,-2) = -6 = \min_{\partial A} f = \min_{A} f.$$

(iii) Nel caso del massimo, si trova che il prodotto scalare è nullo. Nel caso del minimo non si può concludere nulla in quanto non esiste univocamente determinato il vettore tangente alla frontiera nei punti $(-2,-2)$ e $(-2,2)$.