# Esercitazione dell'8 maggio 2008

## Esercizio1

a) *Determinate l'integrale generale dell'equazione differenziale*

$$y' = -\frac{y}{x} + \sin x$$

*quando* $x > 0$.

b) *Determinate la soluzione del seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' & = & -\frac{y}{x} + \sin x \\ y(\pi) & = & 2 \end{cases}$$

## Esercizio2

a) *Determinate l'integrale generale dell'equazione differenziale*

$$y'' + y = \cos x + 2\sin x.$$

b) *Determinate la soluzione del seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' + y & = & \cos x + 2\sin x \\ y(0) & = & 0 \\ y'(0) & = & 0 \end{cases}$$

## Esercizio3

a) *Determinate l'integrale generale dell'equazione differenziale*

$$y''' + y'' + 4y' + 4y = x + e^x.$$

b) *Determinate l'integrale generale dell'equazione differenziale*

$$y''' - 9y' = x^2 + \cos(3x).$$

## Esercizio4

a) *Determinate la soluzione del seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' &= x^2y^2 + yx^2 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

b) *Determinate la soluzione del seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' &= x^2y^2 + yx^2 \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

c) *Determinate la soluzione del seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' &= x^2y^2 + yx^2 \\ y(0) &= -1 \end{cases}$$

# Soluzioni

## Soluzione Esercizio1

a) *Questa è un'equazione lineare del primo ordine, la cui soluzione è*

$$y(x) = -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{c}{x}, \quad c \in R$$

b) $y(x) = -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{\pi}{x}$

# Soluzioni

## Soluzione Esercizio2

a) *Questa è un'equazione differenziale lineare del 2 ordine a coefficienti costanti. L'omogenea associata ha integrale generale* $y_o(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$, *quando* $c_1, c_2 \in R$.
*Una soluzione particolare va cercata del tipo* $v(x) = x(a \cos x + b \sin x)$, *e quindi si trova*
$y_p(x) = -x \cos x + \frac{x}{2} \sin x$.
*L'integrale generale è dato da* $y_g = y_o + y_p$.

b) $y(x) = \sin x - x \cos x + \frac{x}{2} \sin x$.

# Soluzioni

## Soluzione Esercizio3

a) *L'integrale generale dell'omogenea è dato da*

$$y_o(x) = c_1 e^{-x} + c_2 \cos(2x) + c_3 \sin(2x), \quad c_1, c_2, c_3 \in R.$$

*Imponendo che* $v(x) = ax + b$ *sia soluzione di* $y''' + y'' + 4y' + 4y = x$, *troviamo* $y_{p,1}(x) = \frac{1}{4}(x-1)$.
*Imponendo che* $v(x) = ke^x$ *sia soluzione di* $y''' + y'' + 4y' + 4y = e^x$, *troviamo* $y_{p,2}(x) = \frac{1}{10}e^x$. *L'integrale generale cercato è dunque*

$$y_g = y_o + y_{p,1} + y_{p,2}.$$

b) *L'integrale generale dell'omogenea è dato da*

$$y_o(x) = c_1 + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-3x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in R.$$

*Imponendo che* $v(x) = (ax^2 + bx + c)x$ *sia soluzione di* $y''' - 9y' = x^2$, *troviamo* $y_{p,1}(x) = -\frac{1}{81}(3x^3 + 2x)$.
*Imponendo che* $v(x) = a\sin(3x) + b\cos(3x)$ *sia soluzione di* $y''' - 9y' = \cos(3x)$, *troviamo* $y_{p,2}(x) = -\frac{1}{54}\sin(3x)$. *L'integrale generale cercato è dunque*

$$y_g = y_o + y_{p,1} + y_{p,2}.$$

# Soluzioni

## Soluzione Esercizio4

*$y' = x^2(y^2 + y)$ è un'equazione a variabili separabili. Questa ha le soluzioni costanti $y_1(x) = 0$ e $y_2(x) = -1$. Il suo integrale generale (a cui vanno aggiunte le due soluzioni costanti trovate in precedenza) è il seguente*

$$y(x) = \frac{ce^{x^3/3}}{1 - ce^{x^3/3}}, \quad c \in R$$

a) $y(x) = \dfrac{e^{x^3/3}}{2 - e^{x^3/3}}$.
b) $y(x) = 0$.
c) $y(x) = -1$.